

---

---

**МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА, МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СТРУКТУР**

---

---

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К ВЫЯСНЕНИЮ ОСОБЕННОСТЕЙ ТРАНСЗВУКОВОГО ПЕРЕХОДА

А. Н. Богданов

*НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова,  
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана*

**Аннотация.** Вопрос возможности непрерывного трансзвукового перехода течения газа в сопле является принципиальным. Построенные ранее аналитические решения такую возможность не показывали. Попытки уточнения указанных результатов успеха не принесли, потребовались принципиально новые подходы к анализу проблемы.

**Ключевые слова:** газовая динамика, математическое моделирование, трансзвуковые течения, аналитические методы, дифференциальные уравнения.

Перестройка течения от дозвукового режима к сверхзвуковому при разгоне потока в канале переменного сечения (трансзвуковом сопле), логично должна следовать следующей схеме: при достижении газом определенной скорости в минимальном сечении канала — области наибольшего ускорения потока — возникают местные сверхзвуковые зоны, растущие с увеличением скорости потока, они достигают друг друга и смыкаются — возникает течение с переходом через скорость звука по одной звуковой линии, пересекающей весь поток.

Вид линии перехода (звуковой линии), процесс ее видоизменения являются принципиальными вопросами. Первые попытки исследовать переход одного типа течения в другой приписываются [1] Ф.И. Франклю [2] и Г. Гертлеру [3].

Аналитические модели трансзвуковых течений в каналах в случае двумерного стационарного режима в виде разложений по степеням отклонений пространственных координат от начала координатных осей были предложены уже достаточно давно, они носят имена своих первоисследователей [4]:

- течение с одной линией перехода через скорость звука, разделяющей области дозвукового и сверхзвукового течения (течение Мейера — см. рис. 1);

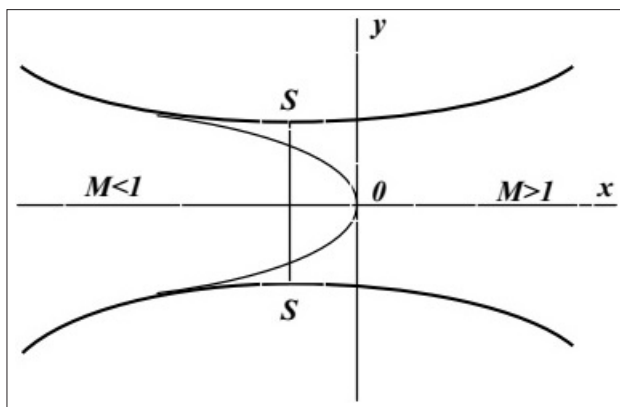


Рис. 1

- дозвуковое в целом течение, содержащее области сверхзвукового течения (течение Тейлора — см. рис. 2).

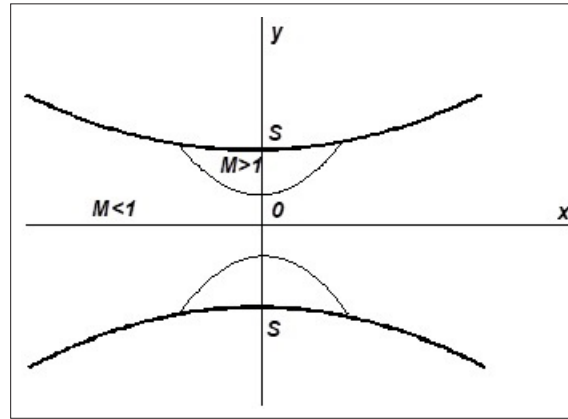


Рис. 2

В стационарном случае для течений майеровского типа традиционно использовались разложения скорости [4] по пространственным координатам (в случае плоского канала) вида

$$u = a \left[ 1 + \alpha x + \frac{\gamma+1}{2} \alpha^2 y^2 + \dots \right], \quad v = a \left[ (\gamma+1) \alpha^2 xy + \frac{(\gamma+1)^2}{6} \alpha^3 y^3 + \dots \right], \quad (1)$$

где  $a$  — скорость звука,  $\alpha$  — постоянная, определяемая из граничных условий.

Для течений с местными сверхзвуковыми зонами (течений Тейлора) традиционно использовались разложения скорости [4] по пространственным координатам (в случае плоского канала) вида

$$u = a \left[ 1 - \eta - \beta x^2 + \eta(\gamma+1) \beta y^2 + \dots \right], \quad v = a \left[ 2\eta(\gamma+1) \beta xy + \dots \right], \quad (2)$$

где  $\eta, \beta$  — постоянные, определяемые граничными условиями. Для плоского сопла имеем

$$\alpha = (\gamma+1) R_s y_s, \quad \eta = \frac{y_s}{3} \sqrt{(\gamma+1) \frac{y_s}{R_s}}, \quad \frac{1}{\beta} = 2\eta(\gamma+1) y_s R_s,$$

заметим, что **число Маха  $M$  в определяющие параметры звуковых линий не входит**. Получается, что через данное сопло можно осуществить только одно стационарное течение, определяемое его конфигурацией однозначно.

Видно, что звуковые линии в течениях Мейера и Тейлора (определяемые по соотношению  $u^2 + v^2 = a^2$ ) имеют качественно различную геометрическую форму:

$$x = -\frac{\gamma+1}{2} \alpha y^2 \text{ (парабола)} \quad \text{и} \quad -\frac{\beta}{\eta} x^2 + (\gamma+1) \beta y^2 = 1 \text{ (гипербола)} \quad (3)$$

соответственно. Заметим здесь, что местные сверхзвуковые области, определяемые их звуковыми линиями вида (3), достигать друг друга на оси сопла  $x = y = 0$  не могут, как и скорость (2) — звуковой величины не достигает, а есть лишь  $1 - \eta$ . При  $\eta \rightarrow 0$  звуковая линия, определяемая (3), стремится схлопнуться в вертикальную прямую  $x = 0$ , конфигурация сопла при этом принимает совершенно нереальные формы с запредельно искривленными стенками и ничтожно узким протоком.

Если принять схему разгона потока до сверхзвуковых скоростей как смену режима Тейлора на режим Мейера, то принципиальным является вопрос о характере перехода от одного режима к другому — непрерывен ли он или происходит скачком, или развивающимся нестационарным процессом, или как последовательность стационарных картин? Возможны ли на звуковой линии точки перегиба и ее конфигурации (рис. 3), объединяющие приведенные выше конфигурации для Мейера и Тейлора?

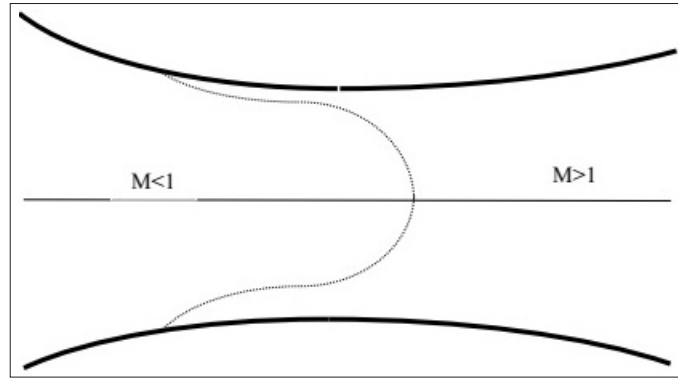


Рис. 3

В «Лекциях по основам газовой динамики» [5] Л. В. Овсянникова, при обсуждении проблем околозвуковых течений в последнем, § 27, приводит конфигурацию звуковой линии, сходную с изображенной на рис. 3, в задаче об истечении сверхзвуковой струи, когда первоначально дозвуковой поток из плоского сужающегося сопла разгоняется в свободное пространство.

По Гудерлею [6] режим течения в самом узком сечении сопла может быть различным. В симметричном относительно направления течения сопле изменение скорости может быть линейным по продольному направлению, давление вдоль оси сопла может падать быстрее, чем по линейному закону (но в этом случае в точке пересечения оси сопла и звуковой линии распределение скоростей имело бы вертикальную касательную, что невозможно обеспечить расширением стенок канала и потому неосуществимое). Снижение давления вдоль оси сопла медленнее, чем по линейному закону определяет горизонтальную касательную соответствующего распределения скоростей, что может обеспечиваться кривизной стенок сопла. По Гудерлею это единственный режим, который устанавливается сам собой.

В своей статье 1946 года [7] С. В. Фалькович высказал следующие соображения: «если перемещаться вдоль прямой, перпендикулярной оси симметрии сопла, удаляясь от оси, то при этом мы будем пересекать линии тока с всё увеличивающейся кривизной и, следовательно,

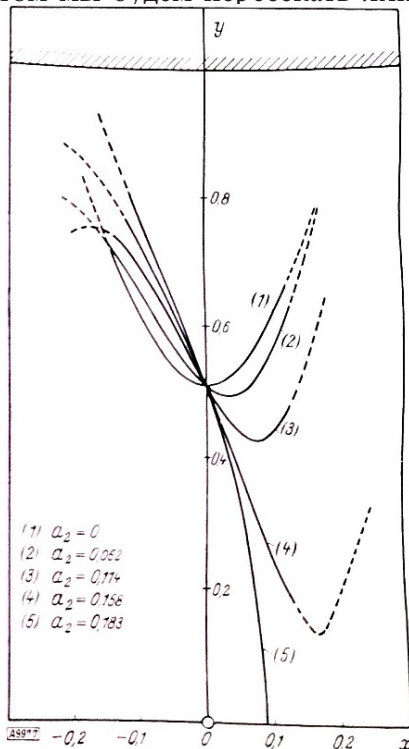


Рис. 4

встречать частицы газа, обладающие все большей скоростью, следовательно, звуковая линия должна быть кривой, выпуклой в сторону сверхзвуковых скоростей с вершиной на оси симметрии» (рис. 1). Соглашаясь с Савелием Владимировичем в таком характере изменения скорости течения, заметим, что принципиальный вопрос о невозможности существования участков выпуклости с другой кривизной (рис. 3) эти соображения не решают.

Гертлер взял на себя труд вычислить коэффициенты разложений по пространственным координатам по пятый порядок включительно  $c_k x^i y^j$ ,  $i + j = 5$ . Ввиду громоздкости вычислений явный вид линии перехода в момент смыкания местных сверхзвуковых зон определен им не был (рис. 4).

Результаты численных расчетов перехода в сопле имеются в монографии У. Г. Пирумова и Г. С. Рослякова [8]. На приведенных ими рисунках (см. рис. 5) виден даже процесс зарождения конфигурации с точкой перегиба, однако продолжение течения в область  $x > 0$  ими не приведено и вызывает вопросы. Местные сверхзвуковые зоны в течении Тейлора «чувствуют» друг друга, подвергаясь воздействию свободно проходящих во всех направлениях через разделя-

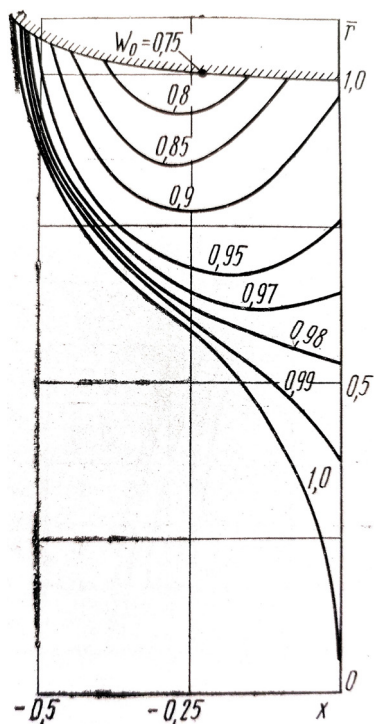


Рис. 5

ющую их область дозвукового течения даже очень слабых возмущений, зародившихся в самих зонах (или вне их) по какой-либо причине; но, например, возникновение на линии перехода точек заострения представляется физически недопустимым.

Звуковая линия задается уравнением

$$u^2 + v^2 = a^2. \quad (4)$$

Входящие в это уравнение для плоского стационарного режима слагаемые являются функциями обоих пространственных координат  $x, y$  и таким образом уравнение (4) есть связь, определяющая звуковую линию как явную  $y = y(x)$  (или неявную  $F(x, y) = 0$ ) зависимость.

Наличие точек перегиба на линии  $y = y(x)$  определяется условием

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

Дифференцирование зависимости (4) как функции  $F(x, y) = 0$  дважды по  $x$  позволяет определить условие наличия точек перегиба. В рассматриваемом здесь случае они могут иметь место при выполнении условия

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 - a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = 0. \quad (5)$$

Наличие в первом уравнении системы (5) членов принципиально разных знаков позволяет сделать вывод, что точки перегиба на звуковой линии формально не исключены.

### Заключение

Новый подход к анализу трансзвукового перехода позволил обосновать возможность непрерывного процесса перестройки течения при разгоне трансзвукового сопла от дозвукового режима к сверхзвукового.

### Литература

1. Рыжов О. С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лавалля. – М. : ВЦ АН СССР, 1965. – 238 с.
2. Франкль Ф. И. О плоскопараллельных воздушных течениях в каналах при околоскоростях // Мат. сборник. – 1933. – Т. 40, Вып. 1.
3. Görtler G. Zum Übergang von Unterschall- zu Überschallgeschwindigkeiten in Düsen // ZAMM. – 1939. – В. 19, Н. 6. – S. 325–337.
4. Зауер Р. Течения сжимаемой жидкости. – М. : Изд-во иностр. лит., 1954. – 312 с.
5. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 368 с.
6. Гудерлей К. Г. Теория околоскоростных течений. Перевод с немецкого Г. А. Вольперта. Под редакцией Л. В. Овсянникова. – М. : ИЛ, 1960. – 421 с.
7. Фалькович С. В. К теории сопла Лавалля // ПММ. – 1946. – Т. 10, Вып. 4. – С. 503–512.
8. Пирумов У. Г., Росляков Г. С. Течения газа в соплах. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 351 с.

# К ВОПРОСУ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ КАПЛЕВИДНОГО ТЕЛА

С. О. Гладков, Н. С. Нагибин

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет)

**Аннотация.** В настоящем сообщении приведены подробности модельного вычисления коэффициента лобового сопротивления для конкретного случая каплевидной формы обтекаемого тела.

**Ключевые слова:** коэффициент лобового сопротивления, динамическая вязкость, число Рейнольдса.

В настоящем сообщении речь будет идти о модельном вычислении коэффициента сопротивления в случае, если тело представляет собой каплевидную форму. Как отмечено в монографии [1], подобная структура должна представлять собой идеально обтекаемую поверхность.

При решении этой задачи мы воспользуемся результатами работы [2]. Также как и в [2], будем рассматривать центральное сечение симметричного тела, толщина которого  $h$  считается конечной. Форму контура будем обозначать с помощью функции  $\eta(x)$ .

Согласно общепринятому определению [1] коэффициент лобового сопротивления введем как

$$C_x = \frac{2F_x}{\rho u^2 S}, \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность континуума,  $u$  — скорость течения,  $S$  — полная площадь поверхности,  $F_x$  — сила сопротивления.

Силу сопротивления будем вычислять с помощью формулы

$$F_x = 2\mu h u a \int_0^a H dx, \quad (2)$$

где  $\mu$  — динамическая вязкость,  $u$  — скорость гидродинамического потока.

Что касается подинтегральной функции, то согласно [2]

$$H = \frac{1}{x^2} \left[ \left( 2G + \frac{\eta}{x} G' \right) \eta' + G' \left( 1 - \frac{\eta^2}{x^2} \right) - \frac{2\eta}{x} G - \frac{x^2}{a} \left( 1 + \frac{a}{x} G \right) \eta'' \right] \Bigg|_{\xi=\frac{\eta}{x}}, \quad (3)$$

где зависимость

$$G(\xi) = \frac{1}{C(\xi^2 + 1) - \frac{R}{4} \left[ \xi + (\xi^2 + 1) \arctg \xi \right]}. \quad (4)$$

Аргумент этой функции задан в виде  $\xi = \frac{\eta(x)}{x}$ , а  $C$  — безразмерная константа.

Если воспользоваться аппроксимационным подходом, предложенным в свое время Л. Д. Ландау, представим зависимость  $\eta(x)$  с помощью моделирующей функции

$$\eta(x) = x e^{-\alpha \frac{x}{a}}, \quad (5)$$

где  $\alpha$  — некоторая безразмерная феноменологическая константа.

Подобный подход весьма удобен в тех случаях, когда мы имеем дело со сложной функциональной зависимостью, найти которую строго аналитически представляется часто большой

проблемой. Именно подобное упрощение благодаря (5) несколько упрощает вычисления и делает их немного более простыми. В результате из (2) находим, что

$$S = 2 \int_0^a x e^{-\frac{\alpha x}{a}} dx = 2a^2 \left[ \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right) e^{-\alpha} \right]. \quad (6)$$

Подставив (6) и (5) в (4), получаем

$$G(t) = \frac{t^2}{C(t^2 + f^2) - 0,25R \left[ tf + (t^2 + f^2) \operatorname{arctg} \left( \frac{f}{t} \right) \right]},$$

$$G'(\xi) = \frac{t^4 \left[ (t^2 + f^2)(Rt - 4Cf) + t^2 R f \operatorname{arctg} \left( \frac{f}{t} \right) \right]}{2a(t^2 + f^2) \left\{ C(t^2 + f^2) - 0,25R \left[ tf + (t^2 + f^2) \operatorname{arctg} \left( \frac{f}{t} \right) \right] \right\}^2}, \quad (7)$$

где  $t = \frac{x}{a}$ , а  $f = f(t) = te^{-\alpha t}$ .

Далее

$$\eta = ate^{-\alpha t},$$

$$\eta' = \frac{d\eta}{dx} = (1 - \alpha t) e^{-\alpha t}, \quad (8)$$

$$\eta'' = \frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{\alpha(\alpha t - 2)e^{-\alpha t}}{a}.$$

С учетом этих формул для коэффициента лобового сопротивления будем иметь в результате

$$C_x = \frac{2F_x}{\rho u^2 S} = \frac{2h}{aR} \xi(\alpha) J, \quad (9)$$

где  $R = \frac{au}{\nu}$  — число Рейнольдса, а  $\xi(\alpha) = \frac{\alpha^2}{[1 - (\alpha + 1)e^{-\alpha}]}$ .

Поскольку

$$J = \int_0^1 H(t, R, C, \lambda) dt, \quad (10)$$

где подынтегральная функция после довольно трудоемких вычислений может быть приведена к виду

$$H(t, R, C, \lambda) = \alpha(2 - \alpha)e^{-\alpha t} - \frac{\alpha^2 e^{-\alpha t}}{\psi} + \frac{\varphi_1 \varphi_2}{2\psi^2}, \quad (11)$$

где входящие сюда безразмерные функции определены как

$$\varphi_1 = \varphi_1(\alpha, \lambda) = \frac{1 + (1 - \alpha t - \lambda^2)e^{-2\alpha t}}{1 + \lambda^2 e^{-2\alpha t}},$$

$$\varphi_2 = \varphi_2(\alpha, \lambda, C, R) = \frac{R}{t} \left[ 1 + \lambda^2 e^{-2\alpha t} - 4\lambda C e^{-\alpha t} (1 + \lambda^2 e^{-2\alpha t}) \right] + \frac{\lambda R e^{-\alpha t}}{t^2} \operatorname{arctg}(\lambda e^{-\alpha t}), \quad (12)$$

$$\psi = \psi(\alpha, \lambda, C) = C \left[ 1 + \lambda^2 e^{-2\alpha t} + \operatorname{arctg}(\lambda e^{-\alpha t}) \right] + \lambda e^{-\alpha t}.$$

Причем  $\lambda = \frac{b}{a}$ . В результате мы приходим к окончательной аналитической формуле для коэффициента лобового сопротивления

$$C_x = \frac{h\lambda}{2l} \frac{\xi(\alpha)(2-\lambda^2)\operatorname{arctg} \lambda}{\left[ C(1+\lambda^2 + \operatorname{arctg} \lambda) + \lambda \right]^2 (1+\lambda^2)}. \quad (13)$$

Заметим, что при  $\alpha = 0$   $\xi(\alpha) = 1$ .

В предельном случае, когда  $\lambda \ll 1$ , отсюда следует, что

$$C_x \approx \frac{h\lambda^2}{lC^2} \xi(\alpha) \sim \lambda^2. \quad (14)$$

Итак,

1. Предложен аппроксимационный подход для вычисления коэффициента лобового сопротивления каплевидного тела, сечение которого имеет конечную ширину  $h$ ;
2. Анализ полученной формулы указывает на качественно корректную трактовку результата.

### Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. Т. 6. – М. : Наука, 1988. – 733 с.
2. Гладков С. О., Нагибин Н. С. К вопросу аналитического определения наилучшей формы обтекания тел в вязком континууме // Известия вузов. Физика. – 2024. – Т. 67, В. 3. – С. 39–52.



## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ТЕЛ С НАБЕГАЮЩИМ ПОТОКОМ ВОЗДУХА

К. Н. Ефимов

*Томский государственный университет*

**Аннотация.** Выполнено численное моделирование поведения комбинированной системы тепловой защиты летательного аппарата. Данное тело совершает заданные колебательные движения в набегающем высокоскоростном потоке воздуха. Вследствие этого возникают дополнительные факторы, влияющие на нестационарный процесс теплообмена между тепловой защитой летательного аппарата и потоком воздуха. Проведено исследование влияния этих колебательных движений тела на характеристики его тепло- и массообмена с набегающим высокоскоростным потоком воздуха.

**Ключевые слова:** теплозащитное покрытие, высокоскоростной поток воздуха, термическое разрушение.

### Введение

Летательные аппараты (ЛА) при высокоскоростном движении в плотных слоях атмосферы Земли подвергаются сильному тепловому воздействию. Следствием этого являются изменение их формы и аэродинамических характеристик. Дополнительными факторами, оказывающими влияние на свойства, являются особенности пространственных движений ЛА относительно набегающего газового потока. К их числу можно отнести колебательные движения, которые приводят к изменению условий обтекания и теплового состояния тела в отличие от случаев их отсутствия. В работах [1–3] показано, что обтекание тела под постоянным углом атаки в течение длительного периода времени приводит к возникновению значительных различий тепловых потоков и теплового нагрева на подветренной и наветренной сторонах его поверхности. Для уменьшения этого эффекта летательным аппаратам могут придаваться вращательные и колебательные движения. Вследствие глубокой взаимосвязи протекания тепловых и аэродинамических процессов описанная задача должна решаться в сопряженной постановке [4]. В работах [5–7] было проведено исследование влияния вращения вокруг оси тела на характеристики сопряженного тепломассопереноса при пространственном сверхзвуковом обтекании. В настоящей работе исследуется влияние на эти характеристики взаимодействия тела с набегающим потоком воздуха при задании колебательного движения ЛА, сопровождаемого изменением угла атаки по периодическим законам.

### 1. Постановка задачи

На рис. 1 представлено графическое представление о геометрии обтекаемого потоком воздуха тела, которое является конусом, затупленным по сфере. В работах [5, 6] были представлены способы оценки времен релаксации в газовой и конденсированной фазах. На основании этих оценок характеристики сопряженного тепло- и массообмена находятся из решения квазистационарных уравнений пространственного пограничного слоя при различных режимах течения. Для модели химически равновесного воздуха, используя гипотезы «пассивности» и равенства чисел Льюиса для всех компонентов равными единице, система уравнений пространственного пограничного слоя в естественной системе координат, связанной с внешней поверхностью обтекаемой оболочки, представлена в работах [5, 8].

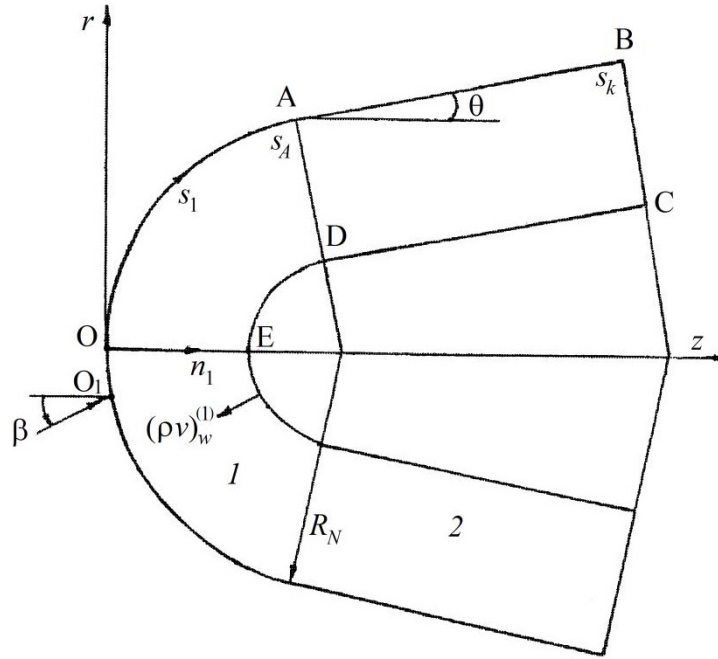


Рис. 1. Геометрия обтекаемого тела:  
1 — пористое сферическое затупление, 2 — коническая часть

Для сферического затупления тепловое состояние определяется из решения нестационарного уравнения сохранения энергии для пористого сферического затупления и квазистационарного уравнения для скорости фильтрации охлаждающего воздуха в порах в направлении нормали к поверхности в рамках однотемпературной модели. Система уравнений для пористой сферической оболочки в рассматриваемой системе координат, связанной с осью симметрии тела, выписана в работах [5, 7]. Квазистационарное уравнение неразрывности совместно с уравнением состояния фильтрующего воздуха, нелинейным законом Дарси и граничными условиями на внутренней и внешней поверхностях оболочки тела можно проинтегрировать и найти расход и давление газа в области 1 [7]. Давление на внутренней «холодной» поверхности оболочки сферической части тела задано в виде:

$$P_L = kP_{e0}, \quad (1)$$

где  $k$  — некоторая постоянная, которая подбирается так, чтобы температура материала сферического затупления не превышала температуры плавления каркаса из пористых металлов [9] на участке теплового воздействия во все время процесса.

Для конической части тела уравнения сохранения энергии и массы в подвижной системе координат  $(s, n_1, \eta)$  с учетом термического разрушения материала вследствие процесса пиролиза записывается по математическим моделям работы [8].

$$\rho_c c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} - \psi \frac{\partial T}{\partial n_1} \right) + c_{p2} G \frac{\partial T}{\partial n_1} = \frac{\partial}{\partial n_1} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial n_1} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial s} \right) + \frac{1}{r_2^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) - Q_c \frac{d\rho_c}{dt}, \quad (2)$$

$$\frac{d\rho_c}{dt} = \left( \frac{\partial \rho_c}{\partial t} - \psi \frac{\partial \rho_c}{\partial n_1} \right) = \begin{cases} -k_c \rho_{c0} \left( \frac{\rho_c - \rho_{c*}}{\rho_{c0}} \right) \exp \left( -\frac{E_c}{RT} \right), & \rho_c > \rho_{c*}, \\ 0, & \rho_c \leq \rho_{c*}, \end{cases} \quad (3)$$

$$G = \int_0^{l_1} \frac{d\rho_c}{dt} dn_1, \quad r_2 = (R_N - n_1) \cos \theta + (s - s_1) \sin \theta,$$

$$l = L - x(t), \quad x(t) = \int_0^t \psi d\tau, \quad (\rho v)_{1w} = G_w, \\ (\rho v)_w^{(2)} = (\rho v)_{1w} + (\rho v)_{2w} + (\rho v)_{3w}, \quad \psi = \sum_{i=2}^3 \frac{(\rho v)_{iw}}{\rho_{cw}}. \quad (4)$$

В данной работе рассматриваются периодические колебания угла атаки в плоскости тангажа. Это движение описывается выражением:

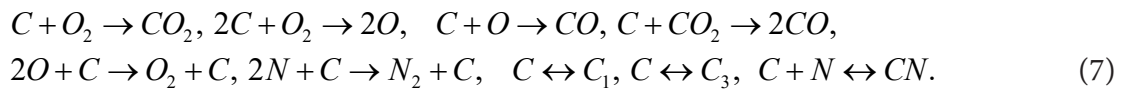
$$\beta(t) = \begin{cases} \beta_m - |\omega_f t - \beta_m| - (n-1)T_f, & \text{at } (n-1)T_f \leq t < nT_f / 2 \\ |\omega_f t - 3\beta_m| - \beta_m - nT_f / 2, & \text{at } nT_f / 2 \leq t < nT_f \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $t$  — длительность процесса,  $n=1,2,\dots$ ,  $T_f = 4\beta_m/\omega_f$  — период флуктуации,  $\omega_f$  — угловая скорость изменения угла атаки  $\beta$ ,  $\beta_m$  — максимальный угол атаки. Вводится следующее допущение: характерная линейная скорость колебания тела много меньше скорости набегающего потока:

$$\Omega_f = \frac{\omega_f R_N}{V_\infty} \ll 1. \quad (6)$$

Начальные и граничные условия для задачи выписаны согласно работ [2, 4, 8].

На границе раздела сред при  $s \geq s_1$  рассматривалась следующая кинетическая схема протекания неравновесных химических реакций ( $T_w \approx 4000$  K) [4, 8]:



Молярные и массовые скорости протекания данных химических реакций (7) и выражение для массовой скорости уноса рассчитываются согласно [4, 8]. Для балансовых соотношений для массовых концентраций компонент используется закон Фика для диффузионных потоков и аналогия процессов тепло- и массообмена [4, 8].

Здесь и ниже  $R_N$  — радиус сферического затупления;  $r_i, i=1, 2$ , — коэффициенты Ламе;  $(\rho v)_w^{(2)}$  — полный массовый унос с углеродной поверхности конической части тела;  $(\rho v)_{1w}$  — массовый унос за счет пиролиза;  $(\rho v)_{2w}$  — массовый унос за счет поверхностных кинетических реакций;  $(\rho v)_{3w}$  — массовый унос за счет поверхностных реакций сублимации;  $L$  — толщина оболочки;  $\theta$  — угол конусности;  $\beta$  — угол атаки;  $n_1$  — нормаль к поверхности тела направлена в глубь оболочки;  $\Psi$  — линейная скорость перемещения поверхности разрушения;  $x(t)$  — граница раздела газообразной и конденсированной фазы (глубина выгорания);  $k_c$ ,  $E_c$  и  $Q_c$  — предэкспонент, энергия активации и тепловой эффект реакции пиролиза. Индексы  $e$ ,  $e0$  и  $w$  соответствуют величинам на внешней границе пограничного слоя, на внешней границе в точке торможения и на поверхности обтекаемого тела;  $\infty$  — величинам набегающего газового потока на бесконечности;  $T$ ,  $0$  — характеристикам турбулентного переноса и начальным условиям.

Система уравнений пространственного пограничного слоя решалась с учетом ламинарной, переходной и турбулентной областей течения. Для описания турбулентного течения применялась двухслойная модель турбулентного пограничного слоя [10, 11]. Коэффициент перемежаемости  $\Gamma$  и переход от ламинарного к турбулентному режиму течения описывался с помощью формулы Дхавана-Нарасимхи [12]. При численном интегрировании принималось, что:  $Pr = 0.72$ ,  $Pr_T = 1$ .

Расчеты обтекания конуса, затупленного по сфере, с углом полураствора  $\theta = 15^\circ$  потоком химически равновесного воздуха с переменным углом атаки  $-\beta_n \leq \beta \leq \beta_m$ ,  $\beta_m = 10^\circ$  проводились для параметров  $R_N = 0.1$  м,  $L_0 = 0.02$  м. Кинетические константы гетерогенных реакций (7) брались из [4, 5]. Для углеродного материала конической оболочки теплофизические коэффициенты приведены в работе [8], для пористой стали для сферического затупления — в [13].

## 2. Результаты и их анализ

Представленные ниже численные результаты относятся к сечению на конической части тела  $s/R_N = 5$ , которое располагается ниже по течению от завесной зоны вследствие вдува газа на сферическом затуплении.

На рис. 2 показана временная зависимость температуры поверхности при скорости набегающего потока  $V_\infty = 5000$  м/сек и для фиксированного угла атаки  $\beta = \beta_m = 10^\circ$  ( $\omega_f = 0$  град/сек) (кривые 1 и 2) and  $\omega_f = 5$  град/с (кривые 3-5). В отсутствии колебательного процесса наблюдается монотонный рост температуры в точках  $\eta = 180^\circ$  (кривая 1) и  $\eta = 0^\circ$  (кривая 2). При наличии колебательного движения (рис. 2, кривая 3) происходит немонотонное изменение температуры поверхности в точках с окружными координатами  $\eta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ , соответствующим кривым 3, 4, 5. При этом происходит одновременное периодическое пересечение кривых 3-5 в определенных точках временного процесса нагрева тела. Как видно из рис. 2, колебательное движение приводит к снижению перепада температур.

Это также может быть продемонстрировано посредством распределений температуры поверхности тела вдоль окружной координаты  $\eta$ , которые представлены на рис. 3 для момента времени  $t = 10$  сек. Здесь кривым 1-4 поставлены в соответствие значения  $\omega_f = 0, 20, 40, 100$  град/сек. Из рис. 3 видно, что в этот момент времени координата  $\eta = 180^\circ$  соответствует наветренной стороне для кривых 1-3 и подветренной для кривой 4. Максимальный перепад температуры на поверхности по окружной координате  $\eta$  достигается при отсутствии колебаний тела  $\omega_f = 0$  град/сек (кривая 1). С увеличением угловой скорости колебаний  $\omega_f$  происходит снижение перепада температур.

Как следствие, при наличии колебаний изменение формы тела вследствие линейного уноса материала из углепластика с поверхности тела, обусловленного аэродинамическим нагревом, будет более равномерным (рис. 4). Кривые 1-3 на рис. 4 отвечают значениям  $\omega_f = 0, 5, 40$  град/сек. При наличии колебаний угла атаки средние значения функций распределения глубины выгорания  $x(\eta)$ , представленных на рис. 4, по сравнению с  $\omega_f = 0$  град/сек будут меньше более чем на ~18 %. Это говорит о том, что подобные колебания тела в целом приводят к меньшему изменению формы ЛА как в качественном, так и количественном отношении.

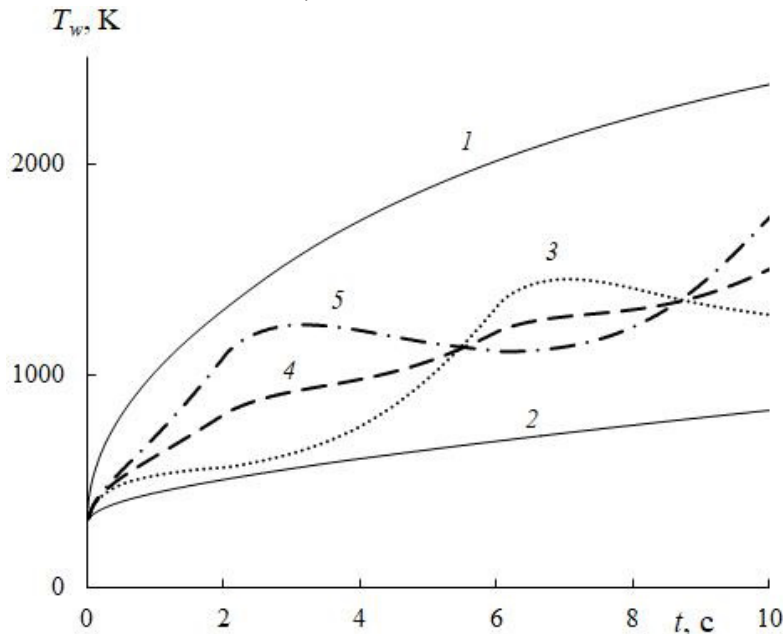


Рис. 2. Зависимости от времени температуры поверхности в сечении  $s/R_N = 5$

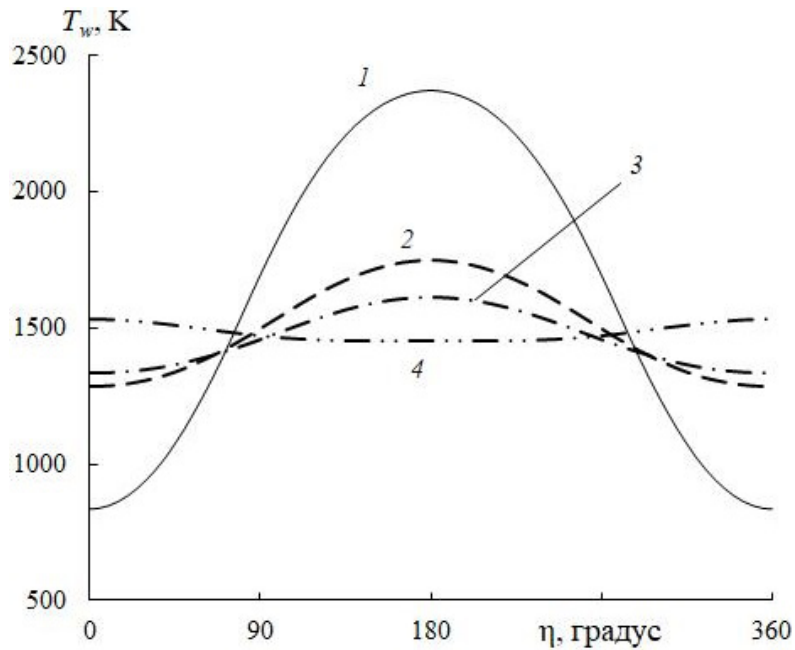


Рис. 3. Зависимости от окружной координаты  $\eta$  температуры поверхности для момента времени  $t = 10$  сек

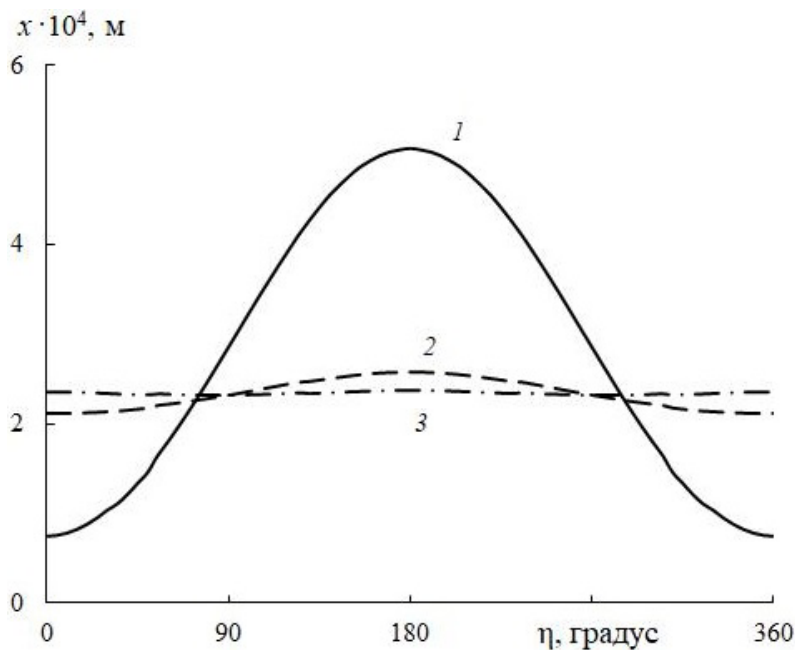


Рис. 4. Зависимости глубины выгорания материала тела для момента времени  $t = 10$  сек

### Закключение

В рамках сопряженной постановки задачи оценено интегральное влияние регулярного колебательного движения тела на перетекание тепла в теплозащитном покрытии. Показано, что даже при небольших значениях скорости колебаний значительно уменьшается перепад температур на поверхности тела. Показано, что изотермические режимы поверхности тела возникают с нерегулярной цикличностью. Периодические колебания угла атаки приводят к более равномерному и уменьшенному изменению формы летательного аппарата по сравнению с движением с постоянным углом атаки. Тем самым обеспечивается лучшее сохранение аэродинамических характеристик летательного аппарата

## Литература

1. Зинченко В. И. Исследование характеристик сопряженного тепломассообмена при пространственном обтекании затупленного по сфере конуса и вдуве газа с поверхности затупления / В. И. Зинченко, К. Н. Ефимов, А. С. Якимов // ИФЖ. – 2007. – Т. 80, № 4. – С. 110–117.
2. Ефимов К. Н. Численный анализ характеристик теплообмена при радиационно-конвективном нагреве конуса, затупленного по сфере / К. Н. Ефимов, В. А. Овчинников, А. С. Якимов, С. А. Гаар // ТВТ. – 2019. – Т. 57, № 1. – С. 83–93.
3. Зинченко В. И. Исследование характеристик сопряженного тепло- и массообмена при вдуве газа и термохимическом разрушении обтекаемого тела / В. И. Зинченко, К. Н. Ефимов, А. С. Якимов // ТВТ. – 2007. – Т. 45, № 5. – С. 749–760.
4. Гришин А. М. Сопряжённые и нестационарные задачи механики реагирующих сред / А. М. Гришин, В. М. Фомин. – Новосибирск : Наука, СО АН СССР, 1984. – 319 с.
5. Efimov K. N. Rotation influence on heat transfer at supersonic flow around a blunted body / K. N. Efimov, V. A. Ovchinnikov, A. S. Yakimov // AIAA Journal. – 2018. – Vol. 56, No 2. – P. 743–751.
6. Ефимов К. Н. Математическое моделирование влияния вращения на характеристики сопряженного тепломассообмена при высокосубзвуковом обтекании затупленного по сфере конуса под углом атаки / К. Н. Ефимов, В. А. Овчинников, А. С. Якимов // Теплофизика и аэромеханика. – 2017. – Т. 24, № 5. – С. 677–689.
7. Ефимов К. Н. Численное исследование влияния вращения на характеристики сопряженного тепломассообмена при сверхзвуковом обтекании конуса, затупленного по сфере под углом атаки и массовом уносе с поверхности / К. Н. Ефимов, В. А. Овчинников, А. С. Якимов // ТВТ. – 2018. – Т. 56, № 2. – С. 253–260.
8. Гришин А. М. Математическое и физическое моделирование тепловой защиты / А. М. Гришин, А. Н. Голованов, В. И. Зинченко, К. Н. Ефимов, А. С. Якимов. – Томск : Изд-во Томск. ун-та, 2011. – 358 с.
9. Зиновьев В. Ф. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах. Справочник / В.Ф. Зиновьев. – Москва : Металлургия, 1989. – 383 с.
10. Патанкар С. Тепло- и массообмен в пограничных слоях / С. Патанкар, Д. Сполдинг. – Москва : Энергия, 1970. – 127 с.
11. Cebeci T. Behavior of turbulent flow near a porous wall with pressure gradient / T. Cebeci // AIAA Journal. – 1970. – Vol. 8, No 12. – P. 2152–2156.
12. Dhawan D. Some properties of boundary layer flow during the transition from laminar to turbulent motion / D. Dhawan, R. Narasimha // Journal of Fluid Mechanics. – 1958. – No 3. – P. 418–436.
13. Андриевский Р. А. Пористые металлокерамические материалы / Р. А. Андриевский. – Москва : Металлургия, 1964. – 187 с.



## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА ТЕЛ С НЕСТАЦИОНАРНЫМ НАБЕГАЮЩИМ ПОТОКОМ ВОЗДУХА

К. Н. Ефимов

*Томский государственный университет*

**Аннотация.** Выполнено численное моделирование поведения материала тепловой защиты летательного аппарата. Рассмотренное тело подвергалось воздействию переменных по времени тепловых нагрузок со стороны набегающего высокоскоростного потока воздуха. Исследованы процессы теплопереноса и термического разрушения в объеме материала тепловой защиты в зависимости от рассмотренных сценариев моделирования нестационарных набегающих потоков воздуха.

**Ключевые слова:** тепловая защита, высокоскоростной нестационарный поток воздуха, термическое разрушение.

### Введение

Известно, что высокоскоростные летательные аппараты (ЛА) подвергаются значительному тепловому воздействию при своем движении в плотных воздушных слоях. Начиная с определенных тепловых состояний материалы оболочки этих тел начинают претерпевать физико-химические изменения. Следствием этого являются термическое разрушение материала оболочек этих тел, что влечет изменение их формы. Так как процессы протекания тепловых и аэродинамических процессов взаимосвязаны, эта задача должна решаться в сопряженной постановке [1]. В настоящей работе исследуется влияние на эти характеристики взаимодействия тела с набегающим потоком воздуха при стационарном разгоне ЛА по траектории в некотором диапазоне скоростей движения.

### 1. Постановка задачи

На рис. 1 представлена геометрия обтекаемого потоком воздуха тела, которое моделируется с помощью конуса, затупленного по сфере. Опираясь на методы, развитые в работе [1], для оценок времен релаксации в газовой и конденсированной фазах в данной работе характеристики сопряженного тепло- и массообмена находятся из решения квазистационарных уравнений пространственного пограничного слоя при различных режимах течения. Для модели химически равновесного воздуха, используя гипотезы «пассивности» и равенства чисел Льюиса для всех компонентов равными единице, система уравнений пространственного пограничного слоя в естественной системе координат, связанной с внешней поверхностью обтекаемой оболочки, представляется в виде [2, 3]. При обтекании высокоэнтальпийным потоком на поверхности композиционных материалов может наблюдаться явление шероховатости, что в конечном итоге оказывает влияние на величины тепловых потоков к таким поверхностям. Для учета этих эффектов используются результаты работ [4, 5].

В качестве оболочки тела рассматривается ограниченный в двух сторон элементами сферических заданных радиусов слой из углепластика, переходящий в аналогичной толщины элемент на конической части тела. Для описания поведения элемента тепловой защиты используется уравнения сохранения энергии и массы в виде в подвижной системе координат  $(s, n, \eta)$  с учетом термического разрушения материала вследствие процесса пиролиза записывается по математическим моделям работы [6]:

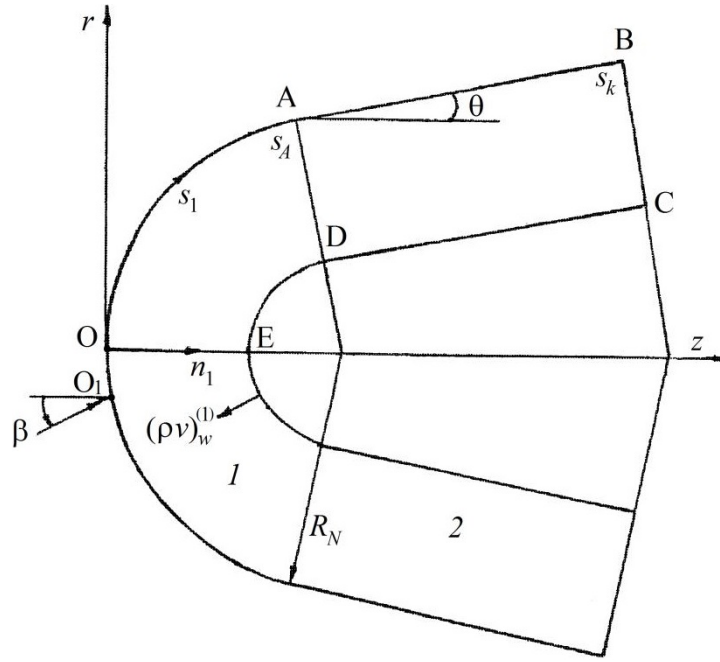


Рис. 1. Геометрия обтекаемого тела:  
1 — сферическое затупление, 2 — коническая часть

$$\rho_c c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} - \psi \frac{\partial T}{\partial n_1} \right) + c_{p2} G \frac{\partial T}{\partial n_1} = \frac{\partial}{\partial n_1} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial n_1} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial s} \right) + \frac{1}{r_2^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) - Q_c \frac{d\rho_c}{dt}, \quad (1)$$

$$\frac{d\rho_c}{dt} = \left( \frac{\partial \rho_c}{\partial t} - \psi \frac{\partial \rho_c}{\partial n_1} \right) = \begin{cases} -k_c \rho_{c0} \left( \frac{\rho_c - \rho_{c*}}{\rho_{c0}} \right) \exp \left( -\frac{E_c}{RT} \right), & \rho_c > \rho_{c*}, \\ 0, & \rho_c \leq \rho_{c*}, \end{cases} \quad (2)$$

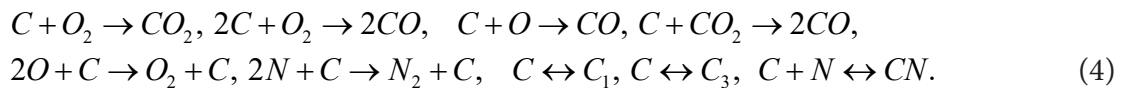
$$G = \int_0^{l_1} \frac{d\rho_c}{dt} dn_1, \quad r_2 = (R_N - n_1) \cos \theta + (s - s_1) \sin \theta,$$

$$l = L - x(t), \quad x(t) = \int_0^t d\tau, \quad (\rho v)_{1w} = G_w,$$

$$(\rho v)_w^{(2)} = (\rho v)_{1w} + (\rho v)_{2w} + (\rho v)_{3w}, \quad d = \sum_{i=2}^3 \frac{(\rho v)_{iw}}{\rho_{cw}}. \quad (3)$$

Начальные и граничные условия для задачи выписаны согласно работ [3, 6].

На границе раздела сред рассматривалась следующая кинетическая схема протекания неравновесных химических реакций ( $T_w \approx 4000$  K) [1, 3]:



Молярные и массовые скорости протекания данных химических реакций (4) и выражение для массовой скорости уноса рассчитываются согласно [1, 3]. Для балансовых соотношений для массовых концентраций компонент используется закон Фика для диффузионных потоков и аналогия процессов тепло- и массообмена [1, 3].

Здесь и ниже  $R_N$  — радиус сферического затупления;  $r_i, i=1, 2$ , — коэффициенты Ламе;  $(\rho v)_w^{(2)}$  — полный массовый унос с углеродной поверхности конической части тела;  $(\rho v)_{1w}$  — массовый унос за счет пиролиза;  $(\rho v)_{2w}$  — массовый унос за счет поверхностных кинетических реакций;  $(\rho v)_{3w}$  — массовый унос за счет поверхностных реакций сублимации;  $L$  — тол-



щина оболочки;  $\theta$  — угол конусности;  $\beta$  — угол атаки;  $n_1$  — нормаль к поверхности тела направлена в глубь оболочки;  $\Psi$  — линейная скорость перемещения поверхности разрушения;  $x(t)$  — граница раздела газообразной и конденсированной фазы (глубина выгорания);  $k_c$ ,  $E_c$  и  $Q_c$  — предэкспонент, энергия активации и тепловой эффект реакции пиролиза. Индексы  $e$ ,  $e0$  и  $w$  соответствуют величинам на внешней границе пограничного слоя, на внешней границе в точке торможения и на поверхности обтекаемого тела;  $\infty$  — величинам набегающего газового потока на бесконечности;  $T$ ,  $0$  — характеристикам турбулентного переноса и начальным условиям.

Система уравнений пространственного пограничного слоя решалась с учетом ламинарной, переходной и турбулентной областей течения. Для описания турбулентного течения применялась двухслойная модель турбулентного пограничного слоя [8, 9]. Коэффициент перемежаемости  $\Gamma$  и переход от ламинарного к турбулентному режиму течения описывался с помощью формулы Дхавана-Нарасимхи [10]. При численном интегрировании принималось, что:  $Pr = 0.72$ ,  $Pr_T = 1$ .

Расчеты обтекания конуса, затупленного по сфере, с углом полураствора  $\theta = 15^\circ$  потоком химически равновесного воздуха с нулевым углом атаки проводились в условиях равномерного разгона от скорости  $V_\infty = 300$  м/сек до  $V_\infty = 3000$  м/сек с величинами ускорения  $a_\infty = 150$  м/сек<sup>2</sup> и  $a_\infty = 300$  м/сек<sup>2</sup>,  $R_N = 0.06$  м,  $L_0 = 0.02$  м. Кинетические константы гетерогенных реакций (4) брались из [1, 3]. Для углеродного материала конической оболочки теплофизические коэффициенты приведены в работе [3].

## 2. Результаты и анализ

На рис. 2 представлены распределения тепловых потоков вдоль поверхности тела при достижении разгоняющимся телом фиксированных значений скоростей: кривая 1 — скорость  $V_\infty = 3000$  м/сек, ускорение  $a_\infty = 300$  м/сек<sup>2</sup>, кривая 2 — скорость  $V_\infty = 3000$  м/сек, ускорение  $a_\infty = 150$  м/сек<sup>2</sup>, кривая 3 — скорость  $V_\infty = 2001$  м/сек, ускорение  $a_\infty = 300$  м/сек<sup>2</sup>, кривая 4 — скорость  $V_\infty = 2001$  м/сек, ускорение  $a_\infty = 150$  м/сек<sup>2</sup>, кривая 5 — скорость  $V_\infty = 999$  м/сек, ускорение  $a_\infty = 300$  м/сек<sup>2</sup>, кривая 6 — скорость  $V_\infty = 999$  м/сек, ускорение  $a_\infty = 150$  м/сек<sup>2</sup>.

На рис. 3 представлены распределения температур поверхности тела при достижении разгоняющимся телом фиксированных значений скоростей. Номера и стили линий соответствуют таковым для тех же условий, что и на рис. 2.

Рис. 4 демонстрирует неизменность по глубине оболочки плотности материала тела вследствие отсутствия процессов термической деструкции вследствие сравнительно низких уровней тепловой нагрева тепловой защиты тела при данной скорости движения  $V_\infty = 999$  м/сек.

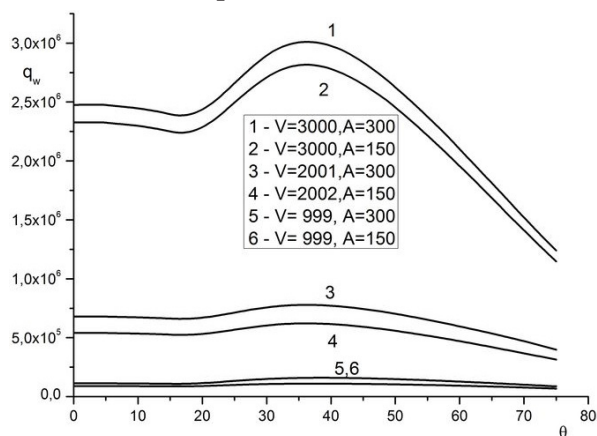


Рис. 2. Распределения тепловых потоков на поверхности тела

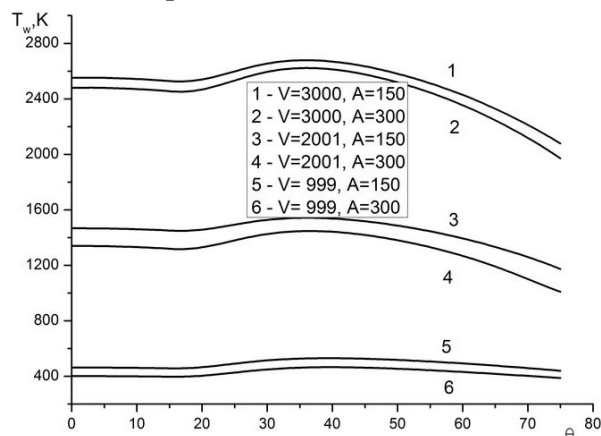


Рис. 3. Распределения температур на поверхности тела

На рис. 5 показаны распределения температуры по глубине материала оболочки в направлении от внутренней к внешней поверхности тепловой защиты при достижении скорости движения  $V_\infty = 999$  м/сек: зеленые кривые — ламинарный режим течения воздушного потока в лобовой точке торможения, красные линии — развитый турбулентный режим течения в окрестности звуковой линии, синие линии — режим реламинизации течения в окрестности точки сопряжения сферической и конической частей тела, при этом сплошные линии соответствуют ускорению  $a_\infty = 150$  м/сек, штриховые линии — ускорению  $a_\infty = 300$  м/сек.

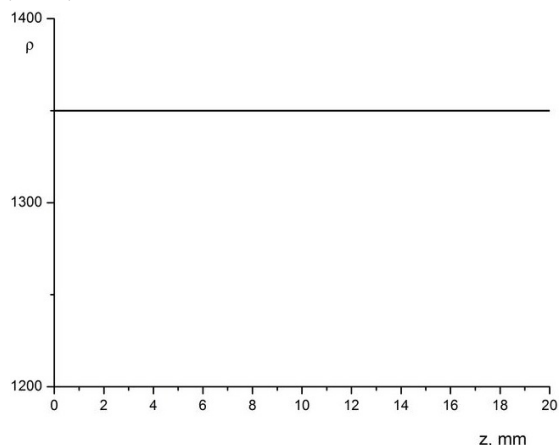


Рис. 4. Распределение по глубине оболочки плотности материала тела,  $V_\infty = 999$  м/сек

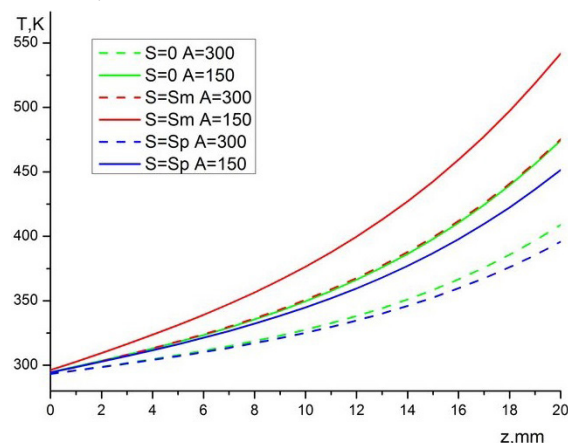


Рис. 5. Распределение температуры по глубине оболочки,  $V_\infty = 999$  м/сек

На рис. 6 показаны распределения по глубине оболочки плотности материала тела в направлении от внутренней к внешней поверхности тепловой защиты при достижении скорости движения  $V_\infty = 2001$  м/сек. Стили линий соответствуют стилям линий на рис. 5. Величины  $d$  являются глубиной выгорания материала тепловой защиты вследствие процессов поверхностного термического разрушения. Достижение уровня плотности в  $\rho_c = 1000$  кг/м³ для данного углепластического материала является признаком завершения что в данном сечении при рассматриваемых условиях процесса его пиролиза. Рис. 6 демонстрирует, что процесс пиролиза завершился для всех рассмотренных сечений материала тепловой защиты и сценариев ускорения тела, кроме варианта окрестности точки сопряжения сферической и конической частей тела и величины ускорения  $a_\infty = 300$  м/сек.

На рис. 7 показаны распределения температуры по глубине материала оболочки в направлении от внутренней к внешней поверхности тепловой защиты при достижении скорости движения  $V_\infty = 2001$  м/сек. Стили линий соответствуют стилям линий на рис. 5.

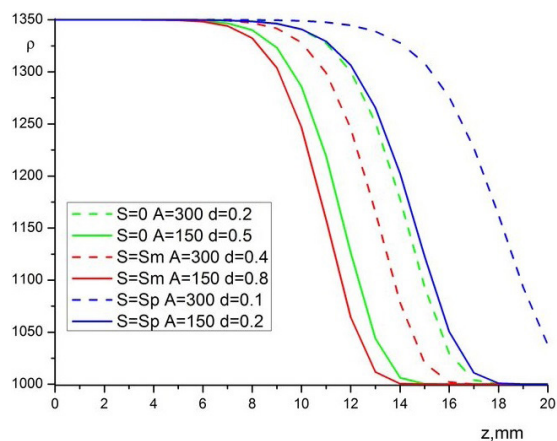


Рис. 6. Распределение по глубине оболочки плотности материала тела,  $V_\infty = 2001$  м/сек

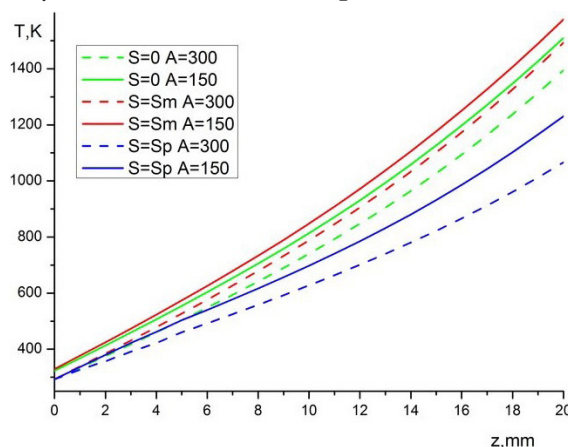


Рис. 7. Распределение температуры по глубине оболочки,  $V_\infty = 2001$  м/сек

На рис. 8 показаны распределения по глубине оболочки плотности материала тела в направлении от внутренней к внешней поверхности тепловой защиты при достижении скорости движения  $V_{\infty} = 3000$  м/сек. Стили линий соответствуют стилям линий на рис. 5. Величины  $d$  являются глубиной выгорания материала тепловой защиты вследствие процессов поверхностного термического разрушения. Рис. 8 демонстрирует, что процесс пиролиза завершился для всех рассмотренных сечений материала тепловой защиты тела.

На рис. 9 показаны распределения температуры по глубине материала оболочки в направлении от внутренней к внешней поверхности тепловой защиты при достижении скорости движения  $V_{\infty} = 3000$  м/сек. Стили линий соответствуют стилям линий на рис. 5.

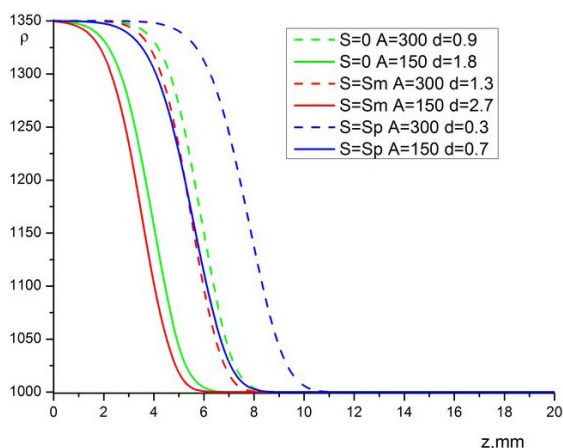


Рис. 8. Распределение по глубине оболочки плотности материала тела,  $V_{\infty} = 3000$  м/сек

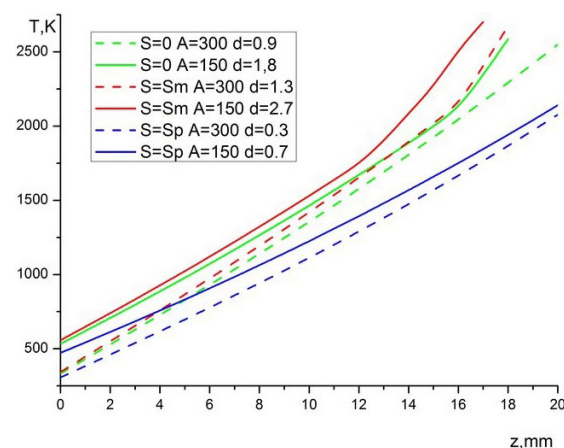


Рис. 9. Распределение температуры по глубине оболочки,  $V_{\infty} = 3000$  м/сек

## Закключение

В результате решения задачи аэродинамического нагрева тела в виде сферически затупленного конуса при ускоренном высокоскоростном обтекании потоком химически равновесного воздуха с учетом термохимического разрушения ТЗП из углепластика исследовано влияние величины ускорения на характеристики тепло- и массообмена в элементе тепловой защиты такого тела. Показано, что увеличение ускорения движения тела для достижения целевой скорости приводит к уменьшению темпа роста температуры и степени термического разрушения композитного материала тепловой защиты.

## Литература

1. Гришин А. М. Сопряжённые и нестационарные задачи механики реагирующих сред / А. М. Гришин, В. М. Фомин. – Новосибирск : Наука, СО АН СССР, 1984. – 319 с.
2. Зинченко В. И. Исследование характеристик сопряженного тепло-массообмена при пространственном обтекании затупленного по сфере конуса и вдуве газа с поверхности затупления / В. И. Зинченко, К. Н. Ефимов, А. С. Якимов // ИФЖ. – 2007. – Т. 80, № 4. – С. 110–117.
3. Гришин А. М. Математическое и физическое моделирование тепловой защиты / А. М. Гришин, А. Н. Голованов, В. И. Зинченко, К. Н. Ефимов, А. С. Якимов. – Томск : Изд-во Томск. ун-та, 2011. – 358 с.
4. Nestler D. E. Compressible Turbulent boundary layer heat transfer to rough surfaces / D. E. Nestler // AIAA Journal. – 1971. – Vol. 9, No 9. – P. 1799–1803.
5. Sigal A. New correlation of roughness density effect on the turbulent boundary layer / A. Sigal, J. E. Danberg // AIAA Journal. – 1990. – Vol. 28, No 3. – P. 554–556.

6. Зинченко В. И. Исследование характеристик сопряженного тепло- и массообмена при вдуве газа и термохимическом разрушении обтекаемого тела / В. И. Зинченко, К. Н. Ефимов, А. С. Якимов // ТВТ. – 2007. – Т. 45, № 5. – С. 749–760.

7. Патанкар С. Тепло- и массообмен в пограничных слоях / С. Патанкар, Д. Сполдинг. – Москва : Энергия, 1970. – 127 с.

8. Cebeci T. Behavior of turbulent flow near a porous wall with pressure gradient / T. Cebeci // AIAA Journal. – 1970. – Vol. 8, No 12. – P. 2152–2156.

9. Dhawan D. Some properties of boundary layer flow during the transition from laminar to turbulent motion / D. Dhawan, R. Narasimha// Journal of Fluid Mechanics. – 1958. – No 3. – P. 418–436.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИССИПАТИВНОГО РАЗОГРЕВА ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ЕЕ ДВИЖЕНИИ ПО ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В. Н. Колодежнов

*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил  
«Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»*

**Аннотация.** Рассмотрена постановка задачи нестационарного теплопереноса при фрикционном взаимодействии твердого полупространства и движущейся по его поверхности пластины при наличии сухого трения между ними. В такой задаче поверхность контакта тел выступает в качестве плоского источника тепла с заданной интенсивностью тепловыделения. При этом предполагается, что в начальный момент времени тела имеют одинаковую температуру, а внешняя поверхность движущейся пластины является теплоизолированной. Для частного случая, когда пластина и полупространство выполнены из одного и того же материала, получено точное решение рассматриваемой задачи.

**Ключевые слова:** фрикционное взаимодействие, диссипативный разогрев, распределенный по поверхности контакта источник тепловыделения.

### Введение

Фрикционное взаимодействие тел при движении друг относительно друга с проскальзыванием сопровождается тепловыделением на поверхности их контактирования. Этот эффект имеет место в самых различных технологиях: обработка металлов резанием и шлифование [1, 2], волочение [3, 4], функционирование тормозных систем [5–7], процесс сварки трением [8, 9] и другие технические приложения [10].

Стационарная задача диссипативного разогрева в системе двух пластин, взаимодействующих фрикционно, с учетом возможного проплавления на их общей границе была рассмотрена в [11]. Моделирование процесса нестационарного теплопереноса при фрикционном взаимодействии двух коаксиальных цилиндров в случае постановки граничных условий третьего рода на свободной поверхности внешнего цилиндра проведено в [12].

В настоящей работе проводится моделирование неустановившегося теплопереноса в случае, когда пластина движется по поверхности полупространства при наличии сухого трения между ними. При этом предполагается, что начальная температура тел является одинаковой, а внешняя свободная поверхность пластины — теплоизолирована.

### 1. Постановка задачи диссипативного разогрева

Пусть пластина толщины  $H$  внешними усилиями прижимается к поверхности полупространства, заполненного материалом с заданными теплофизическими характеристиками. При этом пластина движется прямолинейно и поступательно по отношению к неподвижной поверхности с постоянной скоростью  $V$ . Предполагается, что нормальные усилия (давление), прижимающие пластину к поверхности полупространства, равномерно распределены по ее поверхности с интенсивностью  $P$ .

Будем полагать, что на поверхности фрикционного взаимодействия пластины и полупространства происходит обусловленное диссипацией механической энергии тепловыделение, поверхностная плотность мощности которого принимается равной [13]

$$q = f \cdot P \cdot V, \quad (1)$$



где  $f$  — постоянный и не зависящий от температуры коэффициент сухого трения на поверхности взаимодействия рассматриваемых тел.

В рамках такой постановки граница раздела тел выступает в качестве плоского источника тепла. При этом, естественно, соотношение плотностей отдельных тепловых потоков, отводимых с поверхности фрикционного взаимодействия в пластину  $q_1$  и полупространство  $q_2$  не известно заранее. Вместе с тем предполагается, что выполняется следующее условие баланса

$$q = q_1 + q_2.$$

Считая, что в начальный момент времени пластина и полупространство имели одинаковую температуру  $T_0$ , будем далее рассматривать случай, когда внешняя поверхность пластины полностью теплоизолирована.

Введем прямоугольную систему координат. Размещая начало координат на поверхности контакта тел, ориентируем ось  $Ox$  в плоскости фрикционного взаимодействия в направлении движения пластины, а ось  $Oy$  направим по нормали к поверхности контакта внутрь движущейся пластины.

Рассмотрим следующий набор безразмерных величин, функций и параметров

$$y' = \frac{y}{H}; \quad t' = Fo = \frac{a_1 \cdot t}{H^2}; \quad T'_1(t', y') = \frac{T_1(t, y) - T_0}{T_c - T_0}; \quad T'_2(t', y') = \frac{T_2(t, y) - T_0}{T_c - T_0};$$

$$a'_2 = \frac{a_2}{a_1}; \quad \lambda'_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}; \quad Ki = \frac{f \cdot P \cdot V \cdot H}{\lambda_1 \cdot (T_c - T_0)}, \quad (2)$$

где  $T_1(t, y)$ ,  $T_2(t, y)$  — распределения температур в пластине и полупространстве в зависимости от времени  $t$  и поперечной координаты  $y$ ;  $T_c$  — некоторая характерная температура, например, температура фазового перехода для материала пластины либо твердого полупространства;  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  — коэффициенты, соответственно, теплопроводности и температуропроводности для материалов пластины и полупространства;  $Fo$  — число Фурье;  $Ki$  — критерий подобия Кирпичева [14].

В выражениях (2), и далее верхними штрихами отмечены безразмерные величины и функции. При этом, нижние цифровые индексы 1 и 2 указывают на то, что такие параметры задачи относятся, соответственно, к движущейся пластине и полупространству.

Тогда, принимая во внимание (2), уравнения теплопереноса в рассматриваемой системе для определения температуры  $T'_1$  в пластине и  $T'_2$  в полупространстве в безразмерной форме записи могут быть представлены следующим образом [15–17]

$$\frac{\partial T'_1}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T'_1}{\partial y'^2}; \quad \frac{\partial T'_2}{\partial Fo} = a'_2 \cdot \frac{\partial^2 T'_2}{\partial y'^2}; \quad (3)$$

С учетом сделанных выше допущений в рамках постановки задачи запишем начальные и граничные условия

$$Fo = 0; \quad T'_1 = T'_2 = 0;$$

$$y' = 1; \quad \frac{\partial T'_1}{\partial y'} = 0;$$

$$y' = 0; \quad T'_1 = T'_2; \quad -\frac{\partial T'_1}{\partial y'} + \lambda'_2 \cdot \frac{\partial T'_2}{\partial y'} = Ki;$$

$$y' \rightarrow -\infty; \quad T'_2 \rightarrow 0.$$
(4)

В общем случае получить точное решение для такой задачи аналитическими методами представляется затруднительным. В этой связи рассмотрим далее один частный случай.

## 2. Точное решение поставленной задачи для одного частного случая

В рамках постановки представленной выше задачи рассмотрим частный случай, когда пластина и полупространство выполнены из одного и того же (с точки зрения значений теплофизических параметров) материала.

В такой ситуации имеем

$$a'_2 = 1; \quad \lambda'_2 = 1. \quad (5)$$

Применяя тогда метод интегральных преобразований Лапласа, решение системы уравнений (2) с учетом начальных и граничных условий (3) для частного случая (5) на всем диапазоне изменения поперечной координаты может быть представлено в следующей единой форме записи

$$T'_{1,2}(t', y') = \frac{Ki}{2} \cdot \int_0^{t'} \left\{ \operatorname{erfc} \left( \frac{2 - y'}{2 \cdot \sqrt{\tau}} \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{|y'|}{2 \cdot \sqrt{\tau}} \right) \right\} \cdot \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \cdot (t' - \tau)}}; \quad -\infty < y' \leq 1. \quad (6)$$

Здесь дополнительная функция ошибок Гаусса традиционно задается следующим образом

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_z^{\infty} e^{-\xi^2} \cdot d\xi.$$

Максимальное значение температуры разогрева достигается, естественно, на поверхности фрикционного взаимодействия и принимает значение

$$T'_{\max}(t') = T'_{1,2}(t', 0) = \frac{Ki}{2} \cdot \int_0^{t'} \left\{ 1 + \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) \right\} \cdot \frac{d\tau}{\sqrt{\pi \cdot (t' - \tau)}}.$$

Из последнего соотношения приходим к следующему уравнению для определения момента времени  $t'_c$ , при котором температура на поверхности фрикционного взаимодействия достигнет заданного критического уровня, например, температуры фазового перехода (плавления или сублимации) для материалов пластины и полупространства

$$\sqrt{t'_c} + \frac{1}{2} \cdot \int_0^{t'_c} \operatorname{erfc} \left( \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right) \cdot \frac{d\tau}{\sqrt{t'_c - \tau}} = \frac{\sqrt{\pi}}{Ki}.$$

Анализируя (6), можно видеть, что полученные распределения температур в полупространстве и движущейся пластине прямо пропорциональны значению критерия подобия Кирпичева. В свою очередь числовые значения этого критерия подобия с учетом (2) пропорциональны исходному набору чисто механических параметров процесса таких, как скорость  $V$  относительного движения тел, коэффициент сухого трения  $f$ , величина нагрузки  $P$ , прижимающей пластину к полупространству.

### Заключение

Задача о диссипативном разогреве твердого полупространства при движении по его поверхности теплоизолированной пластины допускает точное решение для частного случая, когда оба контактирующих тела выполнены из одного и того же (по теплофизическим характеристикам) материала. При этом следует отметить, что все температурные характеристики оказались прямо пропорциональны основным, чисто механическим параметрам процесса, а именно скорости движения пластины по поверхности полупространства, давлению, прижимающему пластину к полупространству и коэффициенту сухого трения на поверхности фрикционного взаимодействия.

На основе полученного решения для распределения температуры в рассматриваемых телах получено выражение, позволяющее описывать динамику нарастания с течением времени максимальной температуры в рассматриваемой системе на поверхности фрикционного контакта.



В свою очередь это позволяет оценить время развития процесса диссипативного разогрева, в течение которого максимальная температура достигнет критического уровня, например, соответствующего началу фазового перехода типа плавления или сублимации.

### Литература

1. Резников А. Н. Теплофизика резания / А. Н. Резников. – М. : Машиностроение, 1969. – 288 с.
2. Попок Н. Н. Теория резания: В 2 ч. Ч. 2. Тепловые явления, изнашивание режущего инструмента, качество обрабатываемой поверхности, комбинированные виды обработки, оптимизация функционирования системы резания / Н. Н. Попок. – Новополюк : ПГУ, 2005. – 166 с.
3. Рудской А. И. Волочение / А. И. Рудской, В. А. Лунев, О. П. Шаболдо. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2011. – 126 с.
4. Верецагин М. Н. Влияние скорости волочения на температуру и напряженно-деформированное состояние в проволоке из высокоуглеродистой стали / М.Н. Верецагин, Ю. Л. Бобарикин, А. Н. Савенюк, А. В. Веденев, М. Ю. Целуев, О. И. Игнатенко // Литье и металлургия. – 2008. – № 1 (45). – С. 40–48.
5. Иноземцев В. Г. Тепловые расчеты при проектировании и эксплуатации тормозов / В. Г. Иноземцев. – М. : Транспорт, 1966. – 40 с.
6. Галай Э. И. Тепловой расчет фрикционных узлов тормоза грузовых вагонов / Э. И. Галай, П. К. Рудов, Е. Э. Галай // Механика. Исследования и инновации. – 2018. – Вып.11. – С. 31–40.
7. Хоньшев Н. В. Методика теплового расчета автомобильных дисковых тормозных механизмов / Н. В. Хоньшев, А. А. Лавренченко, А. В. Прохоров, Д. Н. Коновалов // Транспорт. Вестник гражданских инженеров. – 2020. – №4 (81). – С. 203–207.
8. Масленников А. В. Физико-математическая модель фрикционной сварки перемешиванием / А. В. Масленников, В. А. Ерофеев // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. – 2008. – № 10. – С. 64–73.
9. Рзаев Р. А. Динамика температурного поля и оценка технологических параметров при сварке трением с перемешиванием биметаллических пластин / Р. А. Рзаев, А. У. Джалмухамбетов, В. В. Смирнов, Ш. М. Агуев // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2016. – Т. 18, № 1(2). – С. 274–278.
10. Амосов А. П. Разогрев и воспламенение твердых ВВ при сухом трении с износом / А. П. Амосов // Физика горения и взрыва. – 1980. – № 3. – С. 12–19.
11. Колодежнов В. Н. Диссипативный разогрев с проплавлением при фрикционном взаимодействии двух пластин / В. Н. Колодежнов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 4–6 декабря 2023 г. – Воронеж : Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2024. – С. 1285–1289.
12. Колодежнов В. Н. Диссипативный разогрев в системе двух фрикционно взаимодействующих цилиндров / В. Н. Колодежнов // Теплофизика высоких температур. – 2024. – Т. 62, № 2. – С. 272–278.
13. Амосов А. П. Элементарные теплофизические модели трения / А. П. Амосов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2011. – Т. 13, № 4(3). – С. 656–662.
14. Колодежнов В. Н. Безразмерные комплексы и критерии подобия в гидроаэромеханике: Справочник / В. Н. Колодежнов. – Воронеж : Воронежский госпедуниверситет, 2011. – 580 с.
15. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967. – 599 с.
16. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов. – М. : Высшая школа, 2001. – 550 с.
17. Лыков А. В. Тепломассообмен: Справочник / А. В. Лыков. – М : Энергия, 1978. – 480 с.

# ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В РАМКАХ ПЕРВОЙ ЗАДАЧИ СТОКСА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ СО СТЕПЕННЫМ ЗАКОНОМ ВЯЗКОСТИ

В. Н. Колодежнов

*Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил  
«Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»*

**Аннотация.** Рассмотрено автомодельное решение первой задачи Стокса для случая течения неньютоновских жидкостей со степенным законом вязкости. Получено выражение для скорости жидкости, механическое поведение которой описывается реологической моделью Оствальда — де Ваэля. Показано, что такое решение имеет место при дополнительном ограничении на вязкие свойства, когда жидкость демонстрирует псевдопластическое поведение. Представлено выражение, определяющее распределение касательных напряжений в области течения. Проведен анализ особенностей изменения касательных напряжений в окрестности поверхности движущейся пластины.

**Ключевые слова:** первая задача Стокса, неньютоновская жидкость, распределение касательного напряжения.

## Введение

В гидродинамике известна первая задача Стокса [1], которая заключается в нахождении поля скоростей классической жидкости с постоянным значением вязкости в полупространстве, ограниченном пластиной, внезапно приведенной в поступательное движение с заданной скоростью. При этом течение жидкости предполагается ламинарным. Эта нестационарная задача имеет хорошо известное автомодельное решение [2], которое в ряде случаев используется для проверки соответствующих численных методов [3, 4].

Однако для многих реальных жидкостей вязкость демонстрирует более сложное механическое поведение [5–7], демонстрируя зависимость от скорости сдвига.

Нередко, такую зависимость аппроксимируют степенным законом, что приводит к реологической модели Оствальда — де Ваэля [8, 9]. Эта и другие подобные модели используются при рассмотрении самых различных задач гидродинамики [10, 11].

На основе автомодельного решения первой задачи Стокса для случая неньютоновских жидкостей, поведение которых описывается в рамках реологической модели Оствальда — де Ваэля [12], в данной работе рассматриваются особенности распределения касательных напряжений в окрестности движущейся пластины.

## 1. Распределение касательного напряжения в области течения

Рассмотрим традиционную постановку первой задачи Стокса, но для случая, когда вязкость жидкости не постоянна и зависит от скорости сдвига так, что поведение жидкости подчиняется реологической модели Оствальда — де Ваэля [8, 9]

$$\tau_{xy} = k \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1)$$

где  $\tau_{xy}$  — соответствующая компонента тензора напряжений;  $u = u(y, t)$  — скорость жидкости в направлении продольной оси  $Ox$ , сориентированной вдоль пластины в направлении ее движения;  $t$  — время;  $y$  — поперечная координата, отсчитываемая от поверхности пластины

внутри заполненного жидкостью полупространства;  $k$  — коэффициент консистенции;  $n$  — индекс течения.

Если для рассматриваемой задачи ввести в рассмотрение безразмерную автомодельную переменную следующим образом

$$\eta = \eta(y', t') = y' \cdot (2 \cdot n \cdot (n+1) \cdot t')^{-\frac{1}{n+1}}, \quad (2)$$

то уравнение динамики жидкости относительно  $u'(\eta)$  с учетом (1) принимает вид [12]

$$\frac{d^2 u'}{d\eta^2} - 2 \cdot \eta \cdot \left( -\frac{du'}{d\eta} \right)^{2-n} = 0. \quad (3)$$

Безразмерные величины в (2), (3) определяются посредством соотношений

$$u' = \frac{u}{U_0}; \quad t' = \frac{t \cdot U_0}{L}; \quad \tau'_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\rho \cdot U_0^2}; \quad y' = \frac{y}{L},$$

где  $U_0$  — скорость поступательного движения пластины;  $\rho$  — плотность жидкости;  $L$  — некоторый характерный, принимаемый в качестве масштабного, линейный размер области течения, который полагается равным

$$L = \left( \frac{k}{\rho \cdot U_0^{2-n}} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Заметим, что в частном случае  $n = 1$  автомодельная переменная (2) и уравнение (3) приводятся к виду [2], соответствующему классической постановке первой задачи Стокса для жидкости с постоянным значением вязкости.

Решение уравнения (3) с учетом удовлетворения условиям

$$\begin{aligned} \eta = 0; & \quad u' = 1; \\ \eta \rightarrow \infty; & \quad u' = 0, \end{aligned}$$

которые следуют из начального и граничных условий исходной задачи, имеет вид [12]

$$u'(\eta) = 1 - \int_0^\eta \left[ (1-n) \cdot (\xi^2 + C) \right]^{\frac{1}{n-1}} \cdot d\xi, \quad (4)$$

где  $C$  — константа интегрирования.

Эта константа, как функция индекса течения  $C = C(n)$ , должна определяться численно из решения уравнения

$$\int_0^\infty \left[ (1-n) \cdot (\xi^2 + C) \right]^{\frac{1}{n-1}} \cdot d\xi = 1. \quad (5)$$

Важно отметить, что при проявлении реологического свойства дилатантности, когда  $n > 1$ , уравнение (5) теряет смысл и получить решение для распределения скорости не представляется возможным. Поэтому выражение (4) может быть использовано лишь для случая, когда  $0 < n < 1$  и неньютоновская жидкость демонстрирует псевдопластическое поведение.

Типичные кривые зависимости скорости жидкости от автомодельной переменной для некоторых характерных значений индекса течения представлены на рис. 1.

Принимая теперь во внимание (4), приходим к следующему выражению для распределения безразмерного касательного напряжения

$$\tau'_{xy} = - \left\{ \left[ (1-n) \cdot (\eta(y', t')^2 + C(n)) \right]^{\frac{1}{n-1}} \cdot [2 \cdot n \cdot (1+n) \cdot t']^{-\frac{1}{1+n}} \right\}^n. \quad (6)$$

Как и следовало ожидать, начальному моменту времени (когда пластина внезапно приводится в состояние поступательного движения) в рамках рассматриваемой модели течения соответствует особый случай, для которого  $|\tau'_{xy}| \rightarrow \infty$ .

В последующие моменты времени зависимость модуля касательного напряжения от поперечной координаты демонстрирует монотонное убывание до нулевого уровня по мере удаления от движущейся пластины.

Поскольку с учетом (2), (6) выполняется условие

$$\left. \frac{\partial |\tau'_{xy}|}{\partial y'} \right|_{y'=0} = 0,$$

на поверхности пластины модуль касательного напряжения, как функция поперечной координаты, имеет экстремум типа максимум. При этом соответствующее максимальное значение модуля касательного напряжения

$$\max \{ |\tau'_{xy}| \} = \left\{ [(1-n) \cdot C(n)]^{\frac{1}{n-1}} \cdot [2 \cdot n \cdot (1+n) \cdot t']^{-\frac{1}{1+n}} \right\}^n$$

убывает с течением времени.

Кроме этого отметим, что на профиле зависимости модуля касательного напряжения от поперечной координаты при некотором значении  $y' = y'_{\text{inf}}(t')$  имеет место точка перегиба, положение которой определяется следующим образом

$$y'_{\text{inf}}(t') = [2 \cdot n \cdot (1+n) \cdot t']^{\frac{1}{1+n}} \cdot \sqrt{\frac{(1-n)}{(1+n)} \cdot C(n)}.$$

При этом для фиксированного момента времени положение точки перегиба удаляется от движущейся пластины по мере возрастания значения индекса течения.

### Заключение

Рассмотренное автомодельное решение в рамках постановки первой задачи Стокса для течения неньютоновской жидкости со степенным законом вязкости может быть использовано при моделировании гидродинамических процессов в соответствующем технологическом оборудовании, а также при проведении тестирования различных численных методов.

### Литература

1. Stokes G. G. On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums / G. G. Stokes // Trans. Cambr. Phil. Soc. 1851. V. IX, Part II. Cambridge: Printed at the Pitt Press, by John W. Parker. P. 1–99. <https://archive.org/details/b22464074/page/n1/mode/2up>
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М. : Наука. 1974. – 712 с.
3. Янилкин Ю. В. Об аппроксимации вязкости разностных схем и расчеты течений вязкой жидкости / Ю. В. Янилкин, О. О. Топорова, А. Л. Стадник, Л. Е. Корзакова // ВАНТ. Серия : ММФП. – 2016. – № 3. – С. 3–17.
4. Никонов В. В. О тестировании конечно-разностной схемы моделирования процесса вязкой диффузии с учетом сжимаемости газа в двумерном случае / В. В. Никонов // Изв. Самар. науч. центра РАН. – 2020. – Т. 22, № 5. – С. 128–131.
5. Виноградов Г. В. Реология полимеров / Г. В. Виноградов, А. Я. Малкин. – М. : Химия, 1977. – 440 с.
6. Астарита Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей / Дж. Астарита, Дж. Марруччи. – М. : Мир, 1978. – 312 с.
7. Малкин А. Я. Реология. Концепции, методы, приложения / А. Я. Малкин, А. И. Исаев. – М. : Профес-сия, 2007. – 560 с.
8. De Waele A. A. Viscometry and plastometry / A. A. De Waele // J. Oil Colour Chem. Assoc. – 1923. – V. 6. – P. 33–88.

9. Ostwald W. Ueber die rechnerische Darstellung des Strukturgebietes der Viskosität / W. Ostwald // Koll. – Zeitschr, 1929. – V. 47. – P. 176–187. <https://doi.org/10.1007/BF01496959>

10. Борзенко Е. И. Ламинарное течение степенной жидкости в Т-образном канале при заданных перепадах давления / Е. И. Борзенко, О. А. Дьякова, Г. Р. Шрагер // Изв. РАН. МЖГ. – 2019. – № 4. – С. 63–71.

11. Рыльцев И. А. Кинематика течения степенной жидкости в трубе переменного сечения / И. А. Рыльцев, К. Е. Рыльцева, Г. Р. Шрагер // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. – 2020. – № 63. – С. 125–138.

12. Колодежнов В. Н. Автомодельное решение первой задачи Стокса для неньютоновских жидкостей со степенным законом вязкости / В. Н. Колодежнов // Изв. РАН МЖГ. – 2024. – № 2. – С. 52–57.

## МЕТОД ВИЗУАЛИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УЗЛОВ ПО КООРДИНАЦИОННЫМ СФЕРАМ В КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЁТКЕ КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

А. С. Кочкин, М. Д. Старостенков, К. А. Теников

*Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова*

**Аннотация.** Предложен метод визуализации распределения атомных положений (узлов) по координационным сферам в кристаллической решётке кубической симметрии. Визуализация сфер осуществляется при помощи специально разработанного программного обеспечения, позволяющего производить расчёты и представлять трёхмерные модели координационных сфер на основе их индексов узлов, то есть номеров. В статье продемонстрированы графические материалы, таблицы, которые демонстрируют связи между нумерацией координационных сфер и их геометрическими формами, что в свою очередь способствует более детальному и глубокому пониманию структуры модели.

**Ключевые слова:** координационные сферы, визуализация, кубическая решётка, узлы, атомы, многогранник, трёхмерное моделирование.

### Введение

Кристаллография прошла через четыре важных этапа в своем развитии: 1) эмпирический период до начала XIX века, в ходе которого собирались фактические данные о структуре кристаллов, 2) теоретический период в XIX веке, завершившийся в 1912 году и связанный с разработкой теоретических принципов и законов, определяющих строение кристаллов, 3) современный экспериментальный период с 1912 года, вектор которого сместился к практике, эксплуатации и применению открытой информации; и, наконец, 4) предсказательный период с 2010 года, стремящийся предсказывать свойства кристаллических веществ. Все они принесли свои плоды в углублении понимания структуры и закономерностей образования кристаллических материалов [1–7].

Поиск идеальных конфигураций нанокластеров с использованием компьютерного моделирования представляет собой сложный и трудоёмкий процесс. В связи с этим, исследование структурных закономерностей размещения малых металлических кластеров становится важной и актуальной задачей [8, 9].

Важным и ключевым этапом в процессе разработке правил заполнения кристаллической структуры пространственными многогранниками является определение минимальной элементарной ячейки. Ячейка охватывает, как атомные узлы, так и пустоты, из которых можно выделить, например, тетраэдрические и октаэдрические [10, 11], которые играют основную роль в определении физических и химических свойств материалов. Пустоты оказывают влияние на логику атомов, распределение междоузлий, на стабильность кристаллической решётки.

Главные особенности кристаллических решёток представляются в виде закономерности распределения атомных узлов внутри координационных сфер. Однако стоит отметить, что нет общего ответа на вопрос о геометрии размещения узлов в произвольной координационной сфере. В случае простой кубической решётки (ПК) связь между порядковым номером координационной сферы и координатными индексами просматривается только для первых шести сфер, в виде формулы:

$$n_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \quad (1)$$

где набор  $\{x_i, y_i, z_i\}$  задаёт основной многогранник (или многогранники) и количество узлов [12].



Часть натуральных чисел не могут быть представлены в виде суммы квадратов трёх координатных чисел. Данные числа называются согласно из списка литературы с нулевым заполнением [13; 14]. Они находятся по следующей формуле:

$$N = (8\mu - 1)g^2, \quad (2)$$

где  $\mu \in N$ ,  $g \in \{1, 2, 4, 6, \dots\}$ . Цифра 8 соответствует числу узлов (вершин в кубе).

### 1. Методика представления алгоритма конструирования заполнения координационных сфер

В данном разделе приводится процедура моделирования координационных сфер в кристаллических решётках кубической симметрии. Ключевой целью этой методики является оптимизация процесса расчёта и визуализации координационных сфер. С акцентом на их заполнение детализированными многогранниками, что в свою очередь позволит лучше изучить и понять их геометрическую структуру.

Каждая координационная сфера содержит атомные узлы, расположенные на определённом расстоянии от центрального атома, так же основные параметры, такие как: количество узлов, радиус — будут определяться в зависимости от симметрии кристаллической решётки, а также выбранных индексов [15–17].

Алгоритм содержит несколько шагов:

1. Определения порядкового номера координационной сферы  $n_i$  для центрального атома используя формулу (1).
2. Вычисления численных свойств (параметры) для каждой координационной сферы включая количество узлов и объём.
3. Исходя из полученных данных применения правила заполнения различных классов с помощью многогранников, как показано в схеме [18, 19].
4. Визуализировать полученные 3D модели координационных сфер с использованием разработанного приложения.

Последовательность, порядок заполнения кристаллических многогранников по координационным сферам представляется по схеме [18–20]:

$$f(8\mu - 7): \begin{cases} (2l \pm 1, 0, 0) \rightarrow \text{Октаэдр} \\ (2l \pm 1, 4p, 0) \rightarrow \text{Усеченный октаэдр} \\ (2l \pm 1, 2p, 2k) \rightarrow \text{Усеченный куб, Усеченный кубооктаэдр, Ромбокубооктаэдр} \end{cases} \quad (3)$$

$$f(8 - 6): \begin{cases} (2l \pm 1, 2p \pm 1, 0) \rightarrow \text{Кубооктаэдр, Усеченный октаэдр} \\ (4l, 2p \pm 1, 2k \pm 1) \rightarrow \text{Усеченный куб, Усеченный кубооктаэдр, Ромбокубооктаэдр} \end{cases} \quad (4)$$

$$f(8 - 5): \{(2l \pm 1, 2p \pm 1, 2k \pm 1) \rightarrow \text{Ромбокубооктаэдр, Усеченный куб, Усеченный кубооктаэдр, Куб} \} \quad (5)$$

$$f(8\mu - 4): \begin{cases} (2l, 0, 0) \rightarrow \text{Октаэдр} \\ (2l, 2p, 0) \rightarrow \text{Кубооктаэдр} \\ (2l, 2p, 2k) \rightarrow \text{Куб, Усеченный куб, Усеченный кубооктаэдр, Ромбокубооктаэдр} \\ (4l, 4p, 2k) \rightarrow \text{Усеченный куб, Усеченный кубооктаэдр, Ромбокубооктаэдр} \end{cases} \quad (6)$$

$$f(8\mu - 3): \begin{cases} (2l, 2p \pm 1, 0) \rightarrow \text{Усеченный октаэдр} \\ (2l, 2p \pm 1, 2k) \rightarrow \text{Усеченный куб, Усеченный кубооктаэдр, Ромбокубооктаэдр} \end{cases} \quad (7)$$

$$f(8\mu - 2): \{(2l, 1, 2p \pm 1, 2k \pm 1) \rightarrow \text{Ромбокубооктаэдр, Усеченный куб, Усеченный кубооктаэдр} \} \quad (8)$$

$$f(8\mu-0): \begin{cases} (2l, 2p, 0) \rightarrow \text{Кубооктаэдр, Усеченный октаэдр} \\ (4l, 0, 0) \rightarrow \text{Октаэдр} \\ (4l, 4p, 4k) \rightarrow \text{Куб, Усеченный куб, Усеченный кубооктаэдр, Ромбокубооктаэдр} \\ (4l, 4p, 2k) \rightarrow \text{Усеченный куб, Усеченный кубооктаэдр, Ромбокубооктаэдр} \end{cases} \quad (9)$$

Как видно из алгоритма каждой координационной сфере соответствует базовый (основной) многогранник или их комбинации, для решётки ПК. В случае с решёткой ПК будет соответствовать алгоритм заполнения в виде формул:  $f(8\mu-4)$  и  $f(8\mu-0)$ , при использовании соответствующего набора многогранников. Для решётки ГЦК алгоритм будет представляться формулами. На основе приведённых данных следует, что ОЦК решётка представляется менее плотно упакованной по сравнению с ГЦК решёткой:  $f(8\mu-6)$ ,  $f(8\mu-4)$ ,  $f(8\mu-2)$ ,  $f(8\mu-0)$ .

## 2. Результаты и обсуждение

В табл. 1 представлены результаты для ГЦК кристаллической решётки. В таблице 1 представлен результат исследования связи номера координационной сферы с индексами узлов, типом многогранников, количеством вершин.

Таблица 1

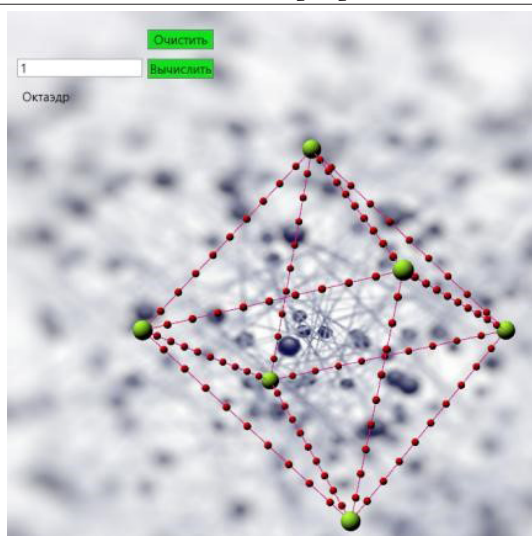
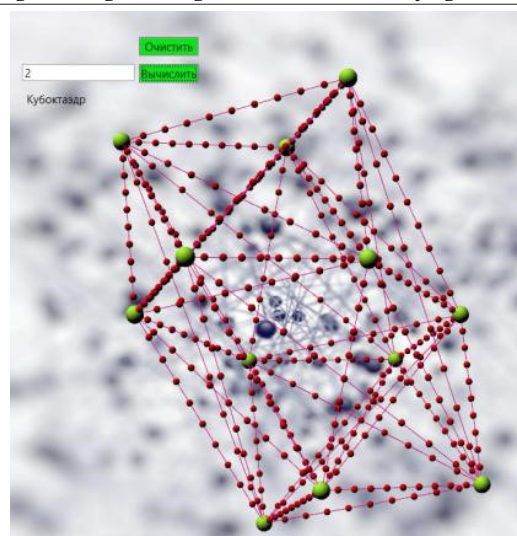
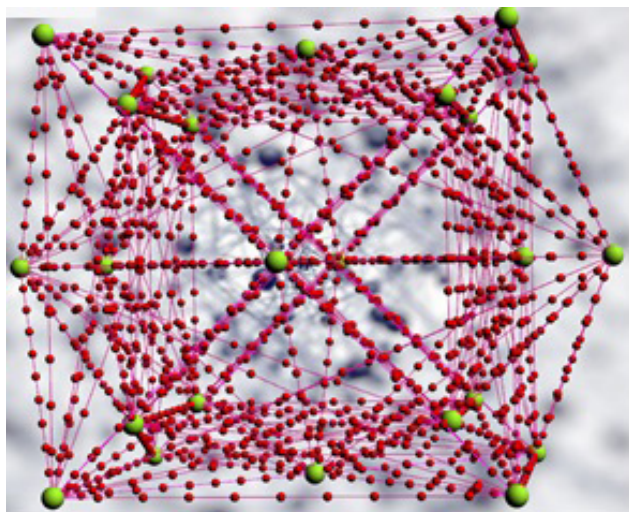
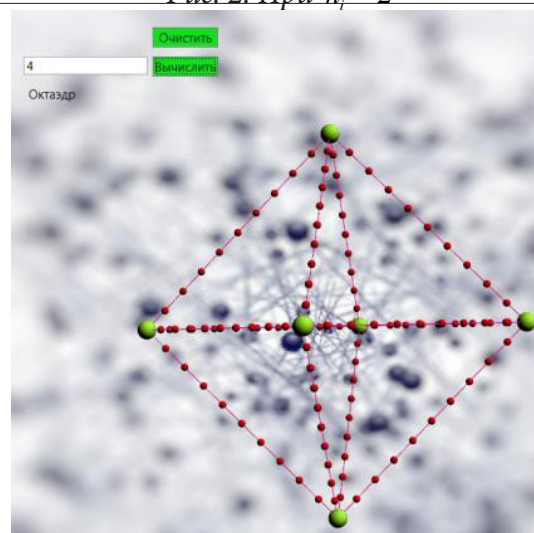
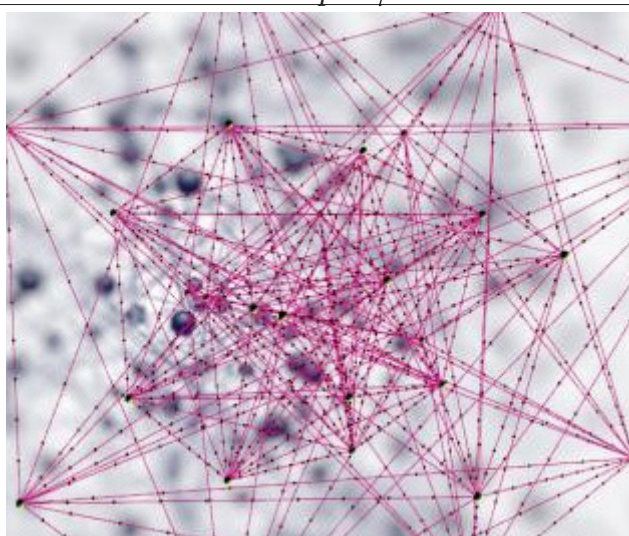
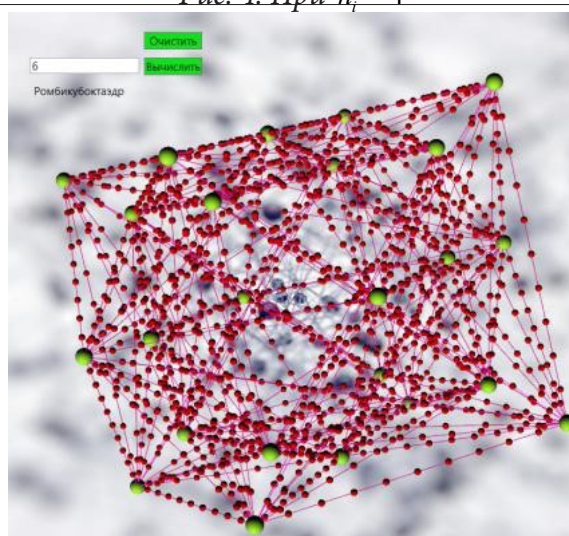
*Связь номера координационной сферы с индексами узлов, типом многогранников, количеством вершин [21–23]*

| $n_i$ | $n_{pn}$ | Индексы узлов | Многогранники                   | Количество вершин |
|-------|----------|---------------|---------------------------------|-------------------|
| 1     | 1        | 100           | О (Октаэдр)                     | 6                 |
| 2     | 2        | 110           | СО (Кубооктаэдр)                | 12                |
| 3     | 3        | 111           | СО (Кубооктаэдр)                | 8                 |
| 4     | 4        | 200           | О (Октаэдр)                     | 6                 |
| 5     | 5        | 210           | ТО (Усеченный Октаэдр)          | 24                |
| 6     | 6        | 211           | RCO (Ромбокубооктаэдр)          | 24                |
| 7     | 8        | 220           | СО (Кубооктаэдр)                | 12                |
| 8     | 9        | 300, 221      | О (Октаэдр), ТС (Усеченный куб) | 30                |
| 9     | 10       | 310           | ТО (Усеченный октаэдр)          | 24                |
| 10    | 11       | 311           | RCO (Ромбокубооктаэдр)          | 24                |
| 11    | 12       | 222           | СО (Кубооктаэдр)                | 8                 |
| 12    | 13       | 320           | ТО (Усеченный октаэдр)          | 24                |
| 13    | 14       | 321           | RCO (Ромбокубооктаэдр)          | 48                |
| 14    | 16       | 400           | О (Октаэдр)                     | 6                 |
| 15    | 17       | 410           | СО (Кубооктаэдр)                | 12                |

Так, табл. 2 иллюстрирует результаты анализа координационных сфер, полученные с использованием разработанного программного обеспечения и демонстрируя совпадения между табл. 1 и вычисленными значениями в программном обеспечении.

В программном обеспечении реализована возможность наложения одной координационной сферы на другую сферу, например, можно наложить седьмую координационную сферу на пятую координационную сферу, что с свою очередь позволит визуализировать итоговое распределение.

## Вычисленные в программное обеспечение параметры координационных сфер

Рис. 1. При  $n_i = 1$ Рис. 2. При  $n_i = 2$ Рис. 3. При  $n_i = 3$ Рис. 4. При  $n_i = 4$ Рис. 5. При  $n_i = 5$ Рис. 6. При  $n_i = 6$



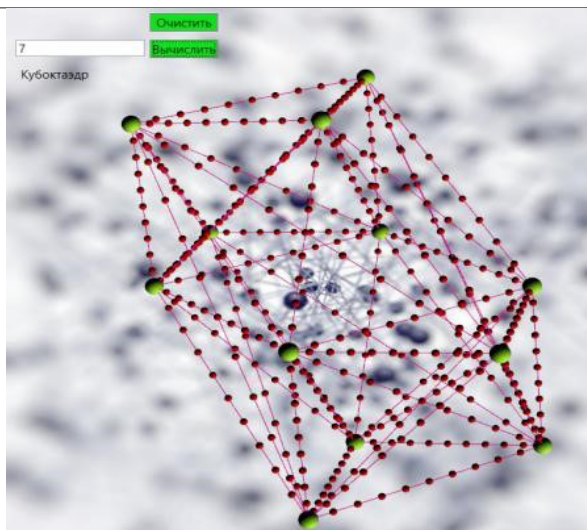


Рис. 7. При  $n_i = 7$

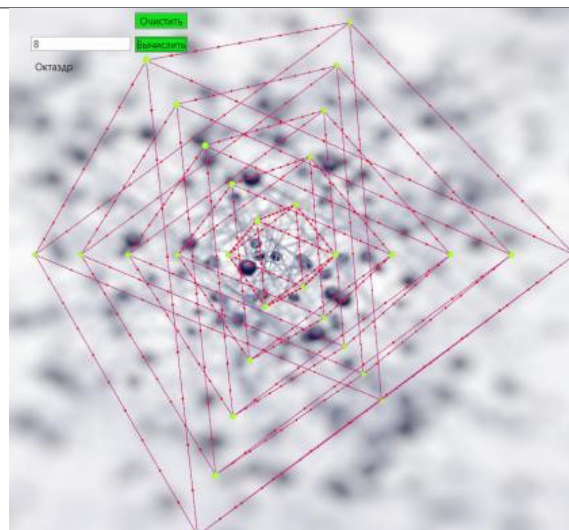


Рис. 8. При  $n_i = 8$

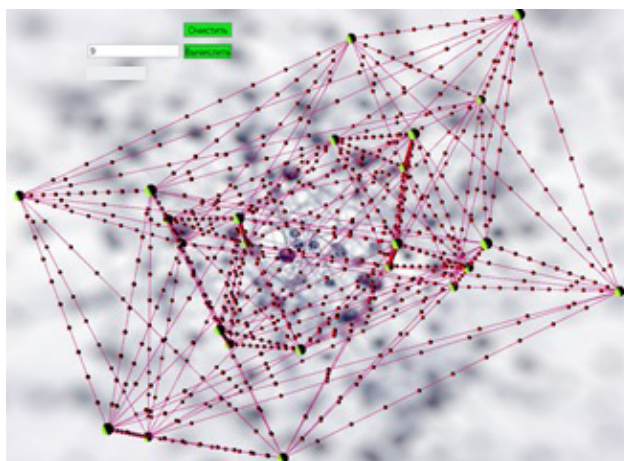


Рис. 9. При  $n_i = 9$

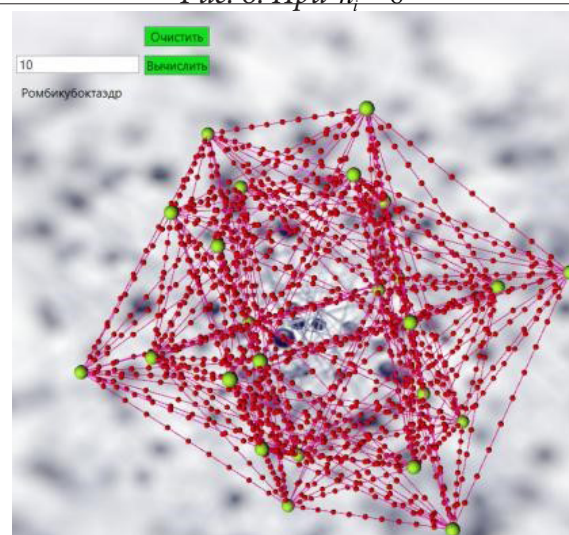


Рис. 10. При  $n_i = 10$

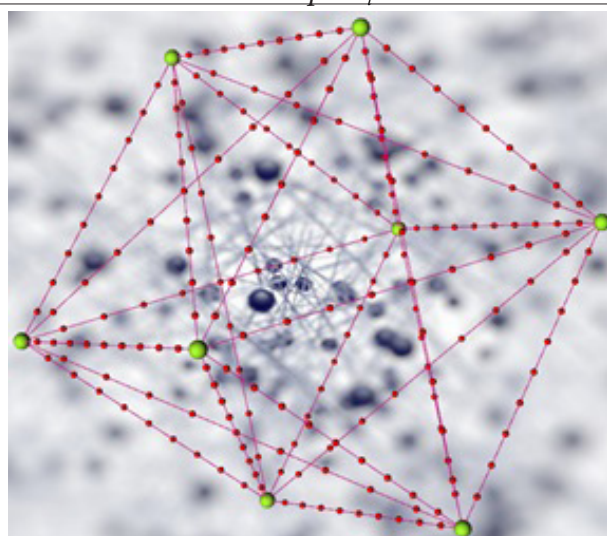


Рис. 11. При  $n_i = 11$

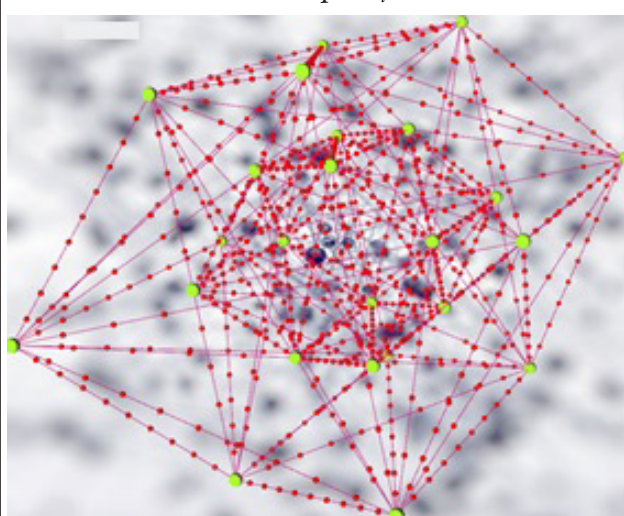


Рис. 12. При  $n_i = 12$

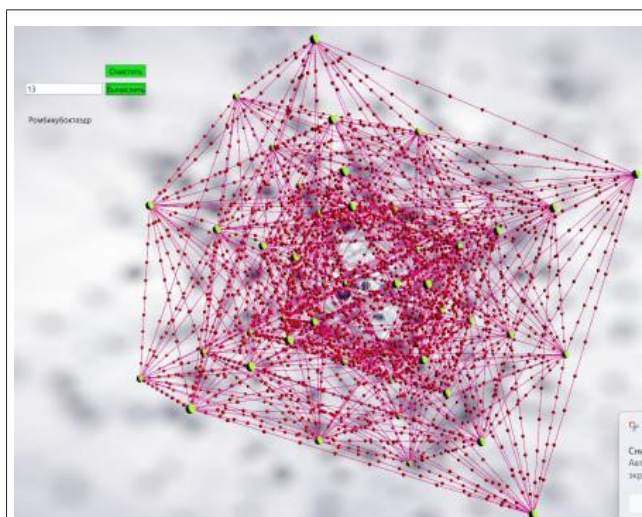


Рис. 13. При  $n_i = 13$

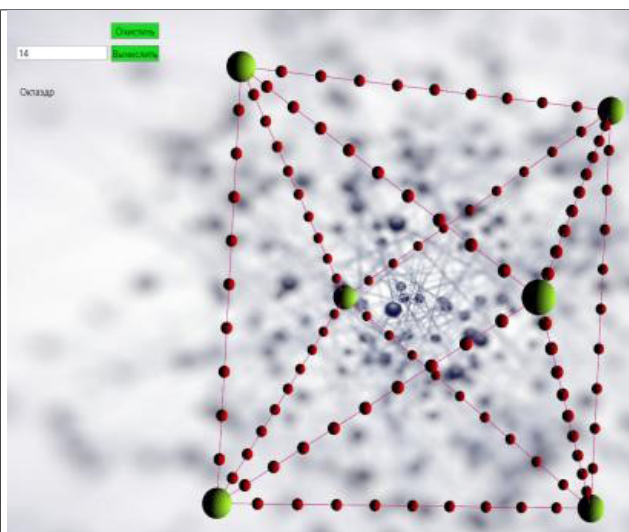


Рис. 14. При  $n_i = 14$

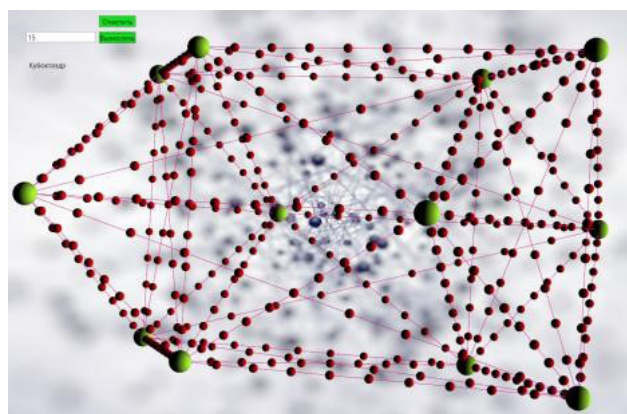


Рис. 15. При  $n_i = 15$

-  — соответствуют отсчитываемым дискретным положением между атомными узлами.
-  — соответствуют кристаллическим узлам (атомным положениям).

Также существует спектр возможностей для изменения угла обзора и масштабирования координационной сферы, что способствует более детальному анализу и изучению структуры.

В сочетании разработанного программного обеспечения и опубликованных научных результатов наблюдается, что есть совпадения между вычисленными в ПО и экспериментально определёнными значениями для первых 15 координационных сфер. Данные соответствия показывают правильность и корректность реализованного алгоритма. Так же показывает его способность эффективно и результативно моделировать координационные структуры, сферы. Рассмотренные координационные сферы демонстрируют, что визуализация, а также последующий анализ их геометрических свойств (характеристик) могут оказаться надёжными инструментами в области исследования кристаллических материалов.

Кроме того, исследовательские работы программного обеспечения демонстрируют, что применения наложения координационных сфер позволяют гораздо глубже исследовать взаимозависимости между различными геометрическими формами, и их влиянием на физические свойства материалов. Такая функция, как менять угол обзора, а также менять масштабы всё это способствует лучше ориентироваться в сложных структурах. Обнаруживать новые закономерности, которые могут оказаться важными для понимания процессов, связанных с нелинейной супратрансмиссией.



И наконец применение алгоритма к различным кристаллическим структурам, например, включая ОЦК и ГЦК, открывает перспективы для дальнейших исследований. Это может привести к поиску новых материалов с уникальными оптическими свойствами. Также к созданию более эффективных технологий в области фотоники.

Исходя из вышеуказанного, данное исследование не только увеличивает и расширяет теоретические представления и знания о координационных сферах, но также вносит вклад в практическое применение полученных знаний в исследованиях современных материалов.

### Выводы

Данная работа представляет подход к визуализации координационных сфер в кубических решётках с их структурой и свойствами. Для более точной визуализации разработанное программное обеспечение выполняет расчёт и отображение трёхмерных моделей на основе индексов узлов. С целью исследования нелинейной супратрансмиссии в модельных кристаллах, изображенные методы и технологии показывают собственную результативность, раскрывая ранее не известные горизонты в области кристаллографии и материаловедения.

Результаты доказали, что точность алгоритмов и возможности наложения координационных сфер, обогащает исследование структур. Огромным шагом в дальнейшем исследовании непростых геометрий кристаллических материалов для удобной визуализации считается манипуляции с углом обзора, что позволяет обнаружить взаимосвязи между структурными параметрами и физическими свойствами веществ.

Данный подход отмечает, что анализ первых 15-ти координационных сфер обнаружил значительное количество совпадений между вычисленными данными и экспериментальными результатами. Что в дальнейшем способствует открытию новых материалов с улучшенными характеристиками и даёт возможность образовать основу для более детальных исследований свойств кристаллических структур. Таким образом, данное исследование, увеличивает основные принципы кристаллографии и практические способности с целью исследования материалов с исключительными оптическими свойствами.

### Благодарности

Авторы настоящей статьи выражают особую благодарность научному руководителю Старостенкову М. Д. за оказанную помощь в написании статьи.

### Литература

1. *Caputo J.-G., Leon J.* Spire nonlinear energy transmission in the gap // *Phys. Lett. A.* – 2001. – Vol. 283. – P. 129–135.
2. *Flach S., Willis C. R.* Discrete breathers // *Physics reports.* – 1998. – T. 295, № 5. – С. 181–264.
3. *Singh M. [et al.]* Effect of discrete breathers on the specific heat of a nonlinear chain // *Journal of Nonlinear Science.* – 2021. – Vol. 31, No 1. – P. 12.
4. *Chacón R., Palmero F., Cuevas-Maraver J.* Impulse-induced localized control of chaos in starlike networks // *Physical Review E.* – 2016. – T. 93, № 6. – C. 062210.
5. *Kamdoum Kuitche A., Togueu Motcheyo A. B., Kanaa T., Tchawoua C.* Supratransmission in transversely connected nonlinear pendulum pairs // *Chaos, Solitons and Fractals.* – 2022. – Vol. 160. – P. 112196
6. *De Santis D., Guarcello C., Spagnolo B., Carollo A., Valenti D.* Generation of travelling sine-Gordon breathers in noisy long Josephson junctions // *Chaos, Solitons and Fractals.* – 2022. – Vol. 158. – P. 112039



7. Cui J.-G., Yang T., Niu M.-Q., Chen L.-Q. Interaction effects of driving amplitudes and frequencies on transitivity in a granular chain // Journal of Sound and Vibration. – 2022. – Vol. 529. – P. 116966
8. Мясниченко В. С. Применение представления о структурных многогранниках заполнения координационных сфер в объемных кристаллах к проблеме поиска устойчивых форм нанокластеров. I / В. С. Мясниченко, М. Д. Старостенков // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2011. – Т. 8, № 2. – С. 49–52. – EDN NUZTJX.
9. Попов В. А. Физика конденсированного состояния. Часть I: Учебное пособие. – Барнаул : Алт. госуд. технич. ун-т им. И. И. Ползунова, 2023. – 265 с.
10. Лощина И. В., Старостенков М. Д. Правила заполнения координационных сфер в кристаллической решетке алмаза // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2006. – Т. 3, № 4. – С. 94–100.
11. Мясниченко В. С. Применение представления о структурных многогранниках заполнения координационных сфер в объемных кристаллах к проблеме поиска устойчивых форм нанокластеров. II / В. С. Мясниченко, М. Д. Старостенков // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2012. – Т. 9, № 3. – С. 284–288. – EDN PAEEKV.
12. Кристаллогеометрия заполнения координационных сфер в наночастицах сплавов состава ав формирующих сверхструктуру B32 / М. Д. Старостенков, Ч. Ян, Г. Донг [и др.] // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2024. – Т. 21, № 1. – С. 68–74. – DOI 10.25712/ASTU.1811-1416.2024.01.008. – EDN EIZLHI.
13. Старостенков М. Д. Метод расчета заполнения координационных сфер в кристаллах с ГЦК решеткой. Томск, 1986. 27 с. / Деп. в ВИНТИ, 31.03.86, № 2968-2-B86
14. Старостенков М. Д. Пространственное распределение атомов по координационным сферам в кристаллах кубической симметрии // Кристаллография. – 1992. – Т. 37, Вып. 3. – С. 717–723.
15. Zheng Y. A piezoelectric metamaterial with bistable circuit shunts for adaptive non-reciprocal elastic wave transmission / Y. Zheng, Z. Wu, X. Zhang, K. W. Wang // Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems: SMASIS 2018. – San Antonio, 2018. – V001T03A003.
16. Zheng Y. A piezo-metastucture with bistable circuit shunts for adaptive nonreciprocal wave transmission / Y. Zheng, Z. Wu, X. Zhang, K. W. Wang // Smart Materials and Structures. – 2019. – Vol. 28, No 4. – P. 045005.
17. Wu Z. Supratransmission in a metastable modular metastructure for tunable non-reciprocal wave transmission / Z. Wu, K. W. Wang // The International Society for Optical Engineering: Proceedings of SPIE. – Colorado, 2018. – Vol. 10595. – P. 1059514.
18. Лощина И. В., Старостенков М. Д. Правило заполнения координационных сфер в кристаллической решетке алмаза // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2006. – Т. 3, № 3. С. 94–100
19. Старостенков М. Д., Лощина И. В. Простое правило заполнения координационных сфер кристаллической решетки типа алмаза // В сб. материалов конференции «XVII Петербургские чтения по проблемам прочности». СанктПетербург, 10–12 апреля 2007 г. СПб., 2007. – С. 92–95.
20. Полетаев, Г. М. Потенциалы Морзе для ГЦК металлов при учете взаимодействия пяти координационных сфер / Г. М. Полетаев, М. Д. Старостенков, И. В. Зоря // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2017. – Т. 14, № 1. – С. 70–75. – EDN YGAUFJ.
21. Starostenkov M, Tabakov P, Romanenko V. [et al.] Regularities of coordination spheres in the crystal lattice of the cubic symmetry[J]. Procedia IUTAM, 2017. – 23. – P. 167–176.
22. Starostenkov M. D. Crystal Filling geometry of coordination spheres in the D03 superstructure / М. Д. Старостенков, Z. Yang, G. Dong // Материалы во внешних полях (МВП–2023) : труды XII Международного онлайн-симпозиума, Новокузнецк, 13–14 марта 2023 года. – Новокузнецк: Сибирский государственный индустриальный университет, 2023. – P. 18–20. – EDN WBXKCC.

23. Кристаллогеометрия заполнения координационных сфер в наночастицах сплава состава  $\text{aZv}$ , формирующего сверхструктуру  $\text{D03}$  / М. Д. Старостенков, Ц. Би, Ч. Ян [и др.] // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2024. – Т. 21, № 3. – С. 367–378. – DOI 10.25712/ASTU.1811-1416.2024.03.011. – EDN VIUSJV.

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ ПСЕВДОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

О. В. Матвиенко<sup>1,2</sup>, Н. С. Фирсанова<sup>2</sup>, И. С. Черкасов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Томский государственный архитектурно-строительный университет

<sup>2</sup>Томский государственный университет

**Аннотация.** В работе проведено исследование неустановившегося течения в псевдопластической жидкости Оствальда — де Вейля в цилиндрической трубе. Для описания поля течения используются двумерные осесимметричные уравнения реодинамики, описывающие баланс массы и количества движения. В периферийной и пристеночной частях течения эффективная вязкость характеризуется низкими значениями. Однако в окрестности оси течения наблюдается значительный рост значений эффективной вязкости. По мере гидродинамической стабилизации течения вязкость потока в приосевой зоне возрастает. Увеличение значений параметра консистенции приводит к росту влияния вязких сил, что способствует более быстрой гидродинамической стабилизации потока. При уменьшении показателя нелинейности скорость течения в ядре потока характеризуется практически однородным профилем, что характерно для пластического течения.

**Ключевые слова:** реология, вязкость, неньютоновские жидкости, псевдопластичность, вязкость, модель Оствальда — де Вейля, течение, математическое моделирование, битумные вяжущие.

### Введение

Модифицирование дорожных битумов полимерами является одним из способов повышения их эксплуатационных свойств, в том числе снижения температуры хрупкости, расширения температурного интервала, повышения деформационной стабильности, долговечности и устойчивости к старению [1, 2].

Известно, что модифицированные битумы обладают сильным неньютоновским поведением, особенно при низких температурах [3]. Неньютоновское поведение характеризуется зависящей от скорости деформации сдвиговой вязкостью и происходит вследствие специфической молекулярной структуры битума [4], содержащего, в частности, асфальтеновые наноагрегаты.

Вязкость битумных дисперсных систем зависит от температуры, соотношения фаз, степени дисперсности и скорости течения и может сильно изменяться в технологическом процессе [3]. В интервале температур от 30°C до 70°C битумные вяжущие проявляют вязкопластические свойства [3, 4]. При температурах выше 70°C битумы становятся псевдопластическими, а при температуре более 100°C — ньютоновскими жидкостями.

Подробный обзор исследований, посвященных течениям реологически сложных сред, приведен в монографиях [5–9].

В настоящее время известно несколько десятков, в основном эмпирических, реологических моделей нелинейно-вязких жидкостей. Такое положение обусловлено различной физической природой существующих текущих систем и отсутствием на сегодня теории, которая позволяла бы достаточно строго вычислять характеристики молекулярного переноса и механического поведения среды, исходя из ее внутренней, микроскопической структуры.

Настоящая работа является продолжением исследований закрученного течения неньютоновских сред [10–18]. Целью настоящей работы является исследование структуры течения псевдопластической жидкости в цилиндрической трубе.

## Математическая модель

Для описания поля течения используются двумерные осесимметричные уравнения реологии, описывающие баланс массы и количества движения [16]:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v r}{\partial r} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho u v r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{xr}}{\partial r}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v^2 r}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \tau_{rr}}{\partial r} - \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r}, \quad (3)$$

К настоящему времени разработано большое количество реологических моделей, описывающих поведение неньютоновских сред. К числу наиболее простых относится модель Оствальда — де Вейля [6]. Обобщение этой модели на трехмерный случай приводит к реологическому уравнению:

$$\mu_{eff} = k U^{n-1}. \quad (4)$$

Постоянная  $k$  называется показателем (индексом) консистенции жидкости; чем меньше ее текучесть, тем больше  $k$ . Параметр  $n$  характеризует степень неньютоновского поведения материала: чем сильнее  $n$  отличается от единицы (в большую или меньшую сторону), тем отчетливее проявляется аномалия вязкости и нелинейность кривой течения.

Значениям  $0 < n < 1$  отвечают псевдопластичные жидкости, эффективная вязкость которых убывает с ростом скоростей сдвига. Ньютоновская жидкость характеризуется параметром  $n = 1$ . Значениям  $n > 1$  отвечают дилатантные жидкости, у которых эффективная вязкость растет с увеличением скоростей сдвига.

Для степенных жидкостей Оствальда — де Вейля реологические соотношения в случае осесимметричного течения имеют вид:

$$\tau_{xx} = 2kU^{n-1} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{xr} = kU^{n-1} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \tau_{rr} = kU^{n-1} \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \tau_{\varphi\varphi} = 2kU^{n-1} \frac{v}{r}, \quad (5)$$

$$U = \sqrt{2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{v}{r} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2}. \quad (6)$$

На границах расчетной области задавались следующие условия:

$$x = 0: \quad u = u_{in} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad v = 0;$$

$$x = L: \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v = 0;$$

$$r = 0: \quad \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad v = 0;$$

$$r = R: \quad u = 0, \quad v = 0;$$

Величина  $u_{in}$  определяет скорость на оси течения на входе в канал. Для параболического распределения осевой скорости эта величина связана с объёмным расходом жидкости  $Q$  соотношением:

$$u_{in} = 2 \frac{Q}{\pi R^2}. \quad (7)$$

Уравнения (1)–(3) решались численно с использованием метода конечного объема [19].

## Анализ результатов

Рассмотрим основные результаты исследования течения дилатантной жидкости в цилиндрическом канале. При моделировании поля течения диапазон изменения параметров был выбран следующим: консистенция жидкости изменялась в пределах  $k = 0.05 - 2 \text{ Н} \times \text{с}^n / \text{м}^2$ , показатель нелинейности — параметром  $n = 0.5 - 1$ , среднерасходная скорость —  $u_{in} = 1 - 10 \text{ м/с}$ . Радиус канала составлял  $R = 0.1 \text{ м}$ , длина канала —  $L = 2 \text{ м}$ .

Предполагалось, что распределение скоростей на входе в канал подчиняется закону Пуазейля: радиальная и тангенциальная компоненты скорости отсутствуют, а для осевой составляющей скорости характерна параболическая зависимость от радиальной координаты. При течении в канале ньютоновской жидкости перестройки профиля течения не происходит, так как пуазейлевский профиль скоростей соответствует установившемуся течению жидкости. С уменьшением показателя нелинейности  $n$  происходит перестройка потока на начальном участке течения, тем более заметная, чем больше отклонение свойств жидкости от ньютоновских. В результате этого скорость потока в приосевой области уменьшается, а в пристеночной — увеличивается. Увеличение значений параметра консистенции  $k$  приводит к росту влияния вязких сил, что способствует более быстрой гидродинамической стабилизации потока (рис. 1).

Структурирование среды, связанное с уменьшением показателя нелинейности, приводит к тому, что скорость течения в ядре потока характеризуется практически однородным профилем, что характерно для пластического течения.

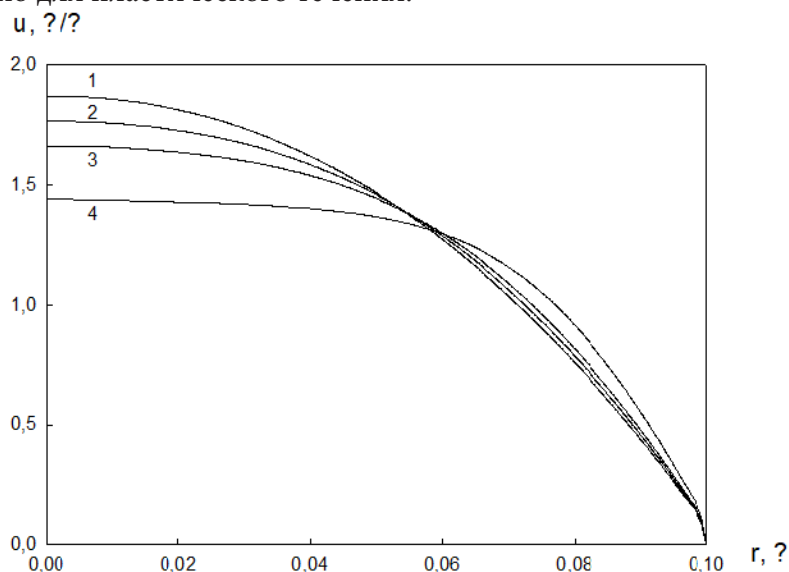


Рис. 1. Радиальное распределение осевой скорости  $u$  в трубе постоянного сечения при разных значениях скорости потока на входе:  $u_{in} = 1 \text{ м/с}$  на различном удалении от входа в трубу: 1 —  $x = 0.16 \text{ м}$ ; 2 —  $x = 0.36 \text{ м}$ ; 3 —  $x = 0.56 \text{ м}$ ; 4 —  $x = 1.56 \text{ м}$

Рассмотрим особенности распределения эффективной вязкости. Характерной особенностью течения псевдопластических сред является увеличение эффективной вязкости с уменьшением скоростей сдвиговых деформаций. Это объясняется процессами структурирования. С увеличением скорости сдвига структурированность среды нарушается, молекулы ориентируются вдоль направления движения. В результате этого сопротивление среды ослабевает, что означает уменьшение эффективной вязкости. Поэтому при потоке псевдопластической жидкости в трубе в периферийной и пристеночной части канала эффективная вязкость характеризуется низкими значениями. Однако в окрестности оси течения, где градиент скорости име-



ет невысокие значения, наблюдается значительный рост значений эффективной вязкости. После наступления стабилизации потока на оси течения  $\mu_{eff}/\mu_{\infty} \rightarrow \infty$ .

На рис. 2, а показано радиальное распределение эффективной вязкости  $\mu_{eff} = kU^{n-1}$  на различном удалении от входа в канал. Как видно из рисунка, в периферийной и пристеночной частях течения эффективная вязкость характеризуется низкими значениями. Однако в окрестности оси течения наблюдается значительный рост значений эффективной вязкости. По мере гидродинамической стабилизации течения вязкость потока в приосевой зоне возрастает.

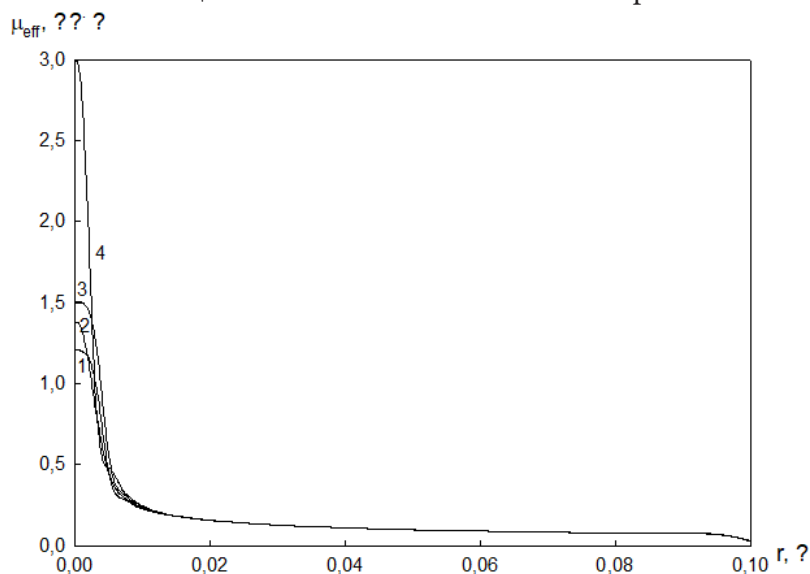


Рис. 2. Радиальное распределение эффективной вязкости в потоке:  $u_{in} = 2.5$  м/с;  $n = 0.5$ ;  $k = 0.5$  Па·с<sup>0.5</sup>; 1 —  $x = 0.2$  м; 2 — 0.6; 3 — 1; 4 — 1.5

С уменьшением показателя нелинейности вязкость в приосевой зоне течения возрастает, а вне этой зоны — уменьшается (рис. 3).

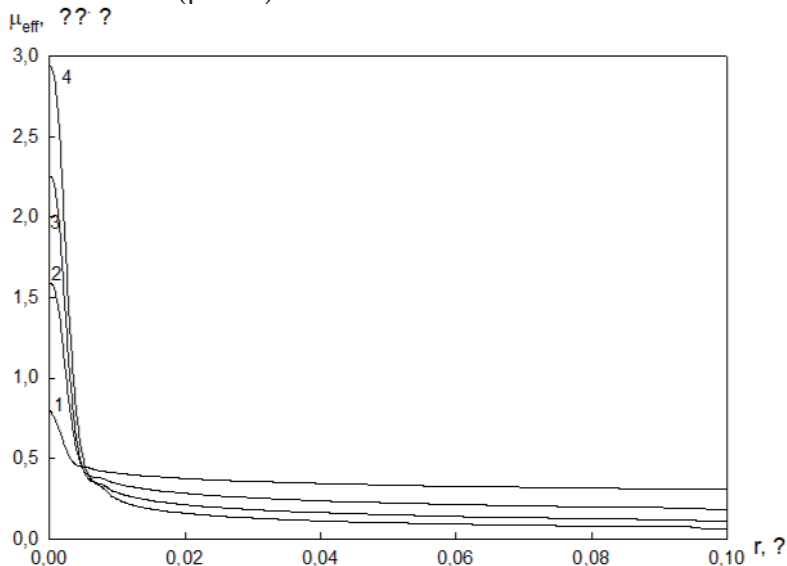


Рис. 3. Влияние показателя нелинейности на радиальное распределение эффективной вязкости:  $u_{in} = 2.5$  м/с;  $x = 1.5$  м;  $k = 0.5$  Па·с<sup>0.5</sup>; 1 —  $n = 0.875$ ; 2 — 0.75; 3 — 0.625; 4 — 0.5

Влияние значения параметра консистенции на радиальное распределение эффективной вязкости представлено на рис. 4. Как видно из рисунка, с увеличением значений параметра консистенции происходит рост значений эффективной вязкости во всей области течения.

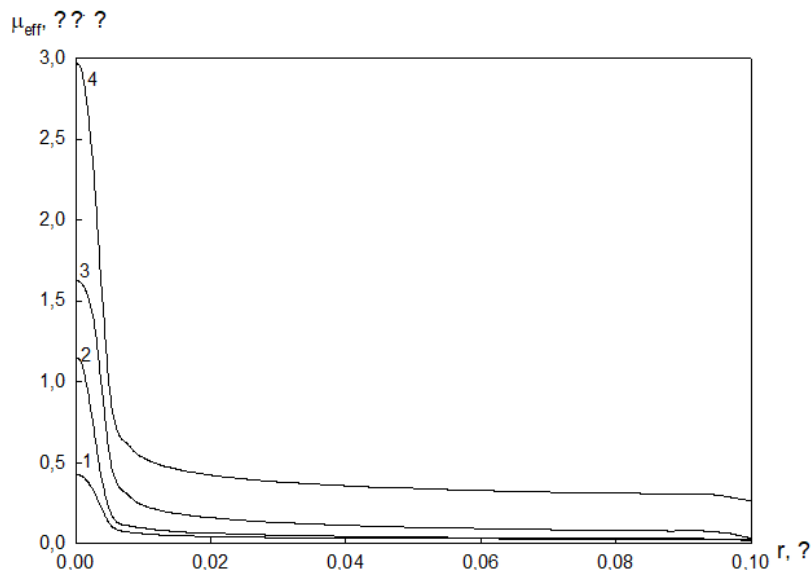


Рис. 4. Влияние параметра консистенции на радиальное распределение эффективной вязкости:  $u_{in} = 2.5$  м/с;  $x = 1.5$  м; 1 —  $k = 0.2$  Па·с<sup>0.5</sup>; 2 — 0.3; 3 — 0.4; 4 — 0.5

### Литература

1. Галдина В. Д. Модифицированные битумы / В. Д. Галдина. – Омск : СибАДИ, 2009. – 228 с.
2. Бабак О. Г. Применение модифицированных вяжущих в дорожном строительстве. Дорожная техника и технологии / О. Г. Бабак, Г. Б. Старков. – 2001. – № 5. – С. 72–75.
3. Золотарев В. А. Дорожные битумные вяжущие и асфальтобетоны / В. А. Золотарев. – Харьков : ХНАДУ, 2014. – 180 с.
4. Матвиенко О. В. Битумные вяжущие / О. В. Матвиенко. – Томск : ТГАСУ, 2024. – 219 с.
5. Островский Г. М. Прикладная механика неоднородных сред / Г. М. Островский. – СПб. : Наука, 2000. – 359 с.
6. Малкин А. Я. Реология: концепции, методы, приложения / А. Я. Малкин, А. И. Исаев. – Профессия, 2007. – 560 с.
7. Уилкинсон У. Л. Неньютоновские жидкости / У. Л. Уилкинсон. – Москва : Мир, 1964.
8. Кутепов А. М. Химическая гидродинамика: справочное пособие / А. М. Кутепов, Л. Д. Полянин, З. Д. Запryanov, А. В. Вязьмин, Д. А. Казенин. – Москва : Бюро Квантум, 1996.
9. Матвиенко О. В. Математические модели производственных процессов для приготовления битумных дисперсных систем / О. В. Матвиенко, Ф. Г. Унгер, В. П. Базуев. – Томск : Изд-во ТГАСУ, 2015.
10. Матвиенко О. В. Численное исследование течения неньютоновских жидкостей в цилиндрическом канале / О. В. Матвиенко // Известия высших учебных заведений. Физика. – 2014. – Т. 57, № 8-2. – С. 183–189.
11. Матвиенко О. В. Математическое моделирование течения закрученного потока вязкопластической жидкости в цилиндрическом канале / О. В. Матвиенко, В. П. Базуев, Н.К. Дульзон // Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 87, № 5. – С. 1129–1137.
12. Матвиенко О. В. Математическое моделирование течения закрученного потока псевдопластической жидкости Балкли — Гершеля в цилиндрическом канале / О. В. Матвиенко, В. П. Базуев, А. Е. Асеева // Инженерно-физический журнал. – 2019. – Т. 92, № 1. – С. 215–226.
13. Матвиенко О. В. Математическое моделирование течения закрученного потока дилатантной жидкости Балкли — Гершеля в цилиндрическом канале / О. В. Матвиенко, В. П. Базуев, А. Е. Асеева // Инженерно-физический журнал. – 2019. – Т. 92, № 6. – С. 2641–2651.

14. Матвиенко О. В. Математическое моделирование течения закрученного потока псевдопластической жидкости в цилиндрическом канале / О. В. Матвиенко, В. П. Базуев, Н. К. Южанова // Инженерно-Физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 3. – С. 544–547.
15. Матвиенко О. В. Математическое моделирование течения закрученного потока дилатантной жидкости в цилиндрическом канале / О. В. Матвиенко, В. П. Базуев, Н. К. Южанова // Инженерно-Физический журнал. – 2014. – Т. 87, № 1. – С. 192–199.
16. Матвиенко О. В. Математическое моделирование закрученного потока термовязкой псевдопластической жидкости Сиско в цилиндрическом канале / О. В. Матвиенко, А. Е. Асеева // Инженерно-физический журнал. – 2020. – Т. 93, № 4. – С. 857–869.
17. Матвиенко О. В. Численное исследование структуры течения и теплообмена при закрученном течении битумно-дисперсных систем в цилиндрических каналах / О. В. Матвиенко, В. П. Базуев, Н. К. Дульзон, Н. Г. Смирнова, М.В. Агафонова // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2014. – № 2 (43). – С. 80–93.
18. Матвиенко О. В. Исследование структуры течения полимерно-битумного вязущего, описываемого моделью Кросса, в трубе с внезапным расширением / О. В. Матвиенко, А. Е. Литвинова, Н. С. Фирсанова // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. – 2022. – Т. 24, № 5. – С. 151–168.
19. Матвиенко О. В. Исследование установившегося течения псевдопластической жидкости, описываемой моделью Сиско, в цилиндрической трубе / О. В. Матвиенко // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2018. – № 55. – С. 99–112.
20. Патанкар С. Численные методы решения задач тепломассообмена и динамики жидкости / С. М. Патанкар. – Энергоатомиздат, 1983.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК ШТЕЙНЕРА НА ГРАНИЦАХ ПОДВИЖНЫХ СРЕД

Е. И. Саввина

Воронежский государственный технический университет

**Аннотация.** Решается задача нахождения точек Штейнера на подвижных границах жидкой и газовых сред. В качестве физического прототипа задачи выбрана тонкая плёнка жидкости, границы которой с воздухом образованы гибкой нитью конечной длины и включают в себя подвижные узлы — точки Штейнера. Доказана трехосевая симметричность конфигурации плёнки и представлена методика определения координат точек Штейнера. Приведён пример соответствующего числового расчёта. Показано совпадение полученного расчётного результата с результатами натурального эксперимента.

**Ключевые слова:** граничные явления, подвижные точки Штейнера, поверхностная энергия, граница подвижных сред, физический прототип математической задачи.

## Введение

Задача Штейнера заключается в том, чтобы найти такую точку  $S$  на плоскости, которая находилась бы на минимальном суммарном расстоянии от заданных точек  $a, b, c$  [1–4]. Решение этой задачи может быть получено путём проведения физических аналогий, отражающих свойство систем стремиться к состоянию с минимальной потенциальной энергией [5, 6].

## 1. Определение параметров физического прототипа решаемой задачи

В настоящей работе в качестве такой аналогии рассмотрена тонкая плёнка жидкости, граница которой с воздухом образована гибкой нитью заданной длины, свободно передвигаемой относительно фиксированных точек опоры (осей скольжения) рис.1.

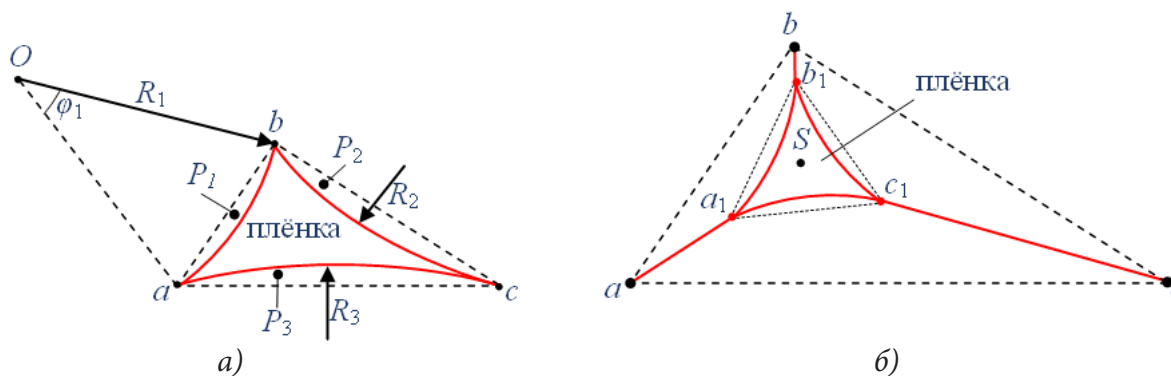


Рис. 1. Графическая иллюстрация задачи: а) образование границ без точек Штейнера; б) появление точек Штейнера  $a_1, b_1, c_1$ . Точки  $a, b, c$  — неподвижные оси

Поскольку плёнка стремится принять конфигурацию с наименьшей площадью (что соответствует минимуму поверхностной энергии), то при ограниченной длине  $D$  нити форма её границ определяется решением классической изопериметрической задачи — дугами окружностей с радиусами  $R_1, R_2, R_3$  [7]. Покажем, что независимо от длины  $D$  нити и длин  $\ell_a = [a, a_1]$ ,  $\ell_b = [b, b_1]$ ,  $\ell_c = [c, c_1]$  выполняется равенство  $R_1 = R_2 = R_3$ , то есть радиусы дуг, определяющие границы плёнки, равны.

Для этого сформулируем задачу поиска минимума площади плёнки. Так как конфигурация плёнки ограничена заданным треугольником  $abc$  со сторонами  $\ell_a, \ell_b, \ell_c$ , из площади кото-

рого вычитаются площади  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  сегментов, построенных на этих сторонах (см. рис. 1а), то минимуму площади плёнки соответствует максимум суммы  $P$  площадей этого сегмента, и функция цели решаемой задачи примет вид:

$$P(P_1, P_2, P_3) = \sum_{i=1}^3 P_i(\cdot) \rightarrow \max, \quad (1)$$

где

$$P_i(\varphi_i, R_i) = \frac{\varphi_i R_i^2}{2} - \frac{R_i^2 \sin \varphi_i}{2}, \quad (2)$$

$$R_1(\varphi_1) = \frac{\ell_a}{2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)}; \quad R_2(\varphi_2) = \frac{\ell_b}{2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi_2}{2}\right)}; \quad R_3(\varphi_3) = \frac{\ell_c}{2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi_3}{2}\right)}. \quad (3)$$

Функция ограничения на длину  $D$  нити:

$$G(\varphi_i) = D - \sum_{i=1}^3 R_i(\varphi_i) \cdot \varphi_i = 0. \quad (4)$$

В результате получаем задачу математического программирования с ограничением равенством:

$$\begin{cases} P(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \rightarrow \max, \\ G(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Для решения этой задачи сформируем функцию Лагранжа:

$$L(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \lambda) = P(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) + \lambda \cdot G(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \rightarrow \max, \quad (6)$$

и составим необходимое условие существования экстремума:

$$\nabla L(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \lambda) = 0. \quad (7)$$

Решение системы (7) имеет вид:

$$\ell_a(\lambda, \varphi_1) = \frac{2\lambda + 2\lambda \left( 2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)^2 - 1 \right) - \lambda \varphi_1 \sin(\varphi_1)}{2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) + \varphi_1 \left( 2 \cdot \sin\left(\frac{\varphi_1}{4}\right)^2 - 1 \right)}, \quad (8)$$

$\ell_b(\lambda, \varphi_2)$  и  $\ell_c(\lambda, \varphi_3)$  отличаются от (8) величинами  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  соответственно.

Проверим ограничения

$$G(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = 0. \quad (9)$$

Подстановка  $\ell_a$ ,  $\ell_b$ ,  $\ell_c$  в (4) даёт равенство:

$$\lambda(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) = D, \quad (10)$$

из которого следует, что для любого  $D$  найдётся такое значение  $\lambda$ , при котором поставленная задача (5) имеет решение.

После подстановки  $\ell_a$ ,  $\ell_b$ ,  $\ell_c$  в (3) получим:

$$R_1(\varphi_1) = \lambda; \quad R_2(\varphi_2) = \lambda; \quad R_3(\varphi_3) = \lambda. \quad (11)$$

Таким образом,  $R_1 = R_2 = R_3$ , то есть радиусы дуг, определяющие границы плёнки, равны.

## 2. Определение точек Штейнера

С увеличением длины  $D$  нити (рис. 1б) часть границ, примыкающих к осям скольжения, смыкается, и образуются новые точки  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  — точки расхождения смежных ветвей гра-



ниц, называемые точками Штейнера, при этом конфигурация плёнки принимает вид равносторонней фигуры с границами, образованными дугами окружностей равного радиуса.

Из геометрических соображений следует, что если увеличивать длину  $D$  нити, то фигура  $a_1, b_1, c_1$  будет стремиться к точке  $S$  с нулевой потенциальной энергией системы. Точка  $S$  является общей точкой Штейнера системы  $a, b, c$  из которой пары вершин  $a, b$ ;  $b, c$  и  $c, a$  будут видны под углом 120 град.

Поставим задачу.

Для заданной системы неподвижных точек  $a, b, c$  и длины  $D$  нити найти:

расположение точек Штейнера  $a_1, b_1, c_1$ ;

расположение общей точки  $S$  Штейнера всей системы.

Для решения этой задачи воспользуемся расчётной схемой, показанной на рис. 2.

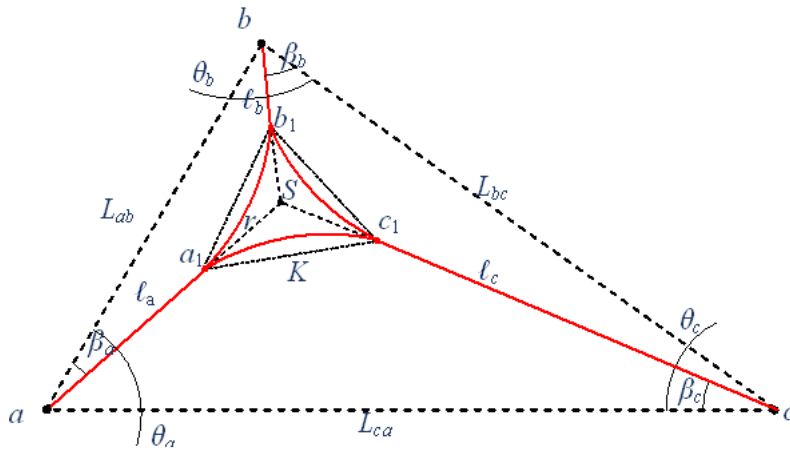


Рис. 2. Расчётная схема решаемой задачи

В представленной расчётной схеме известны: длины  $L_{ab}, L_{bc}, L_{ca}$  сторон треугольника  $abc$  и его углы  $\theta_a, \theta_b, \theta_c$  при вершинах  $a, b, c$  соответственно.

Требуется определить:

длины отрезков  $\ell_a = [a, a_1], \ell_b = [b, b_1], \ell_c = [c, c_1]$ ;

длины хорд  $K$ ;

углы  $\beta_a, \beta_b, \beta_c$ .

Для вычисления указанных семи неизвестных составим систему из семи уравнений:

Одно уравнение, определяющее длину  $D$  нити:

$$D = 2 \cdot \ell_a + 2 \cdot \ell_b + 2 \cdot \ell_c + 3 \cdot K \cdot \frac{\pi}{3}. \quad (12)$$

Шесть уравнений, связывающие искомые с неизвестными через тригонометрические отношения в треугольниках  $abS, bcS, caS$ :

$$L_{ab}^2 = (\ell_a + r)^2 + (\ell_b + r)^2 - 2 \cdot (\ell_a + r) \cdot (\ell_b + r) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right); \quad (13)$$

$$L_{bc}^2 = (\ell_b + r)^2 + (\ell_c + r)^2 - 2 \cdot (\ell_b + r) \cdot (\ell_c + r) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right); \quad (14)$$

$$L_{ca}^2 = (\ell_c + r)^2 + (\ell_a + r)^2 - 2 \cdot (\ell_c + r) \cdot (\ell_a + r) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right); \quad (15)$$

$$(\ell_b + r)^2 = (\ell_a + r)^2 + L_{ab}^2 - 2 \cdot (\ell_a + r) \cdot L_{ab} \cdot \cos(\beta_a); \quad (16)$$

$$(\ell_c + r)^2 = (\ell_b + r)^2 + L_{bc}^2 - 2 \cdot (\ell_b + r) \cdot L_{bc} \cdot \cos(\beta_b); \quad (17)$$

$$(\ell_a + r)^2 = (\ell_c + r)^2 + L_{ca}^2 - 2 \cdot (\ell_c + r) \cdot L_{ca} \cdot \cos(\beta_c), \quad (18)$$

где

$$r = \frac{K}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right). \quad (19)$$

Для числового примера с исходными данными  $L_{ab} = 120$  мм,  $L_{bc} = 160$  мм,  $L_{ca} = 200$  мм,  $\theta_b = \pi/2$ ,  $D = 525$  мм получено решение:

$\ell_a = 63,8$  мм,  $\ell_b = 10,6$  мм,  $\ell_c = 105,2$  мм,  $K = 52,7$  мм,  $\beta_a = 17,2$  град,  $\beta_b = 47,2$  град,  $\beta_c = 24,1$  град.

Полученное решение совпадает с результатом физического эксперимента, показанном на рис. 3.

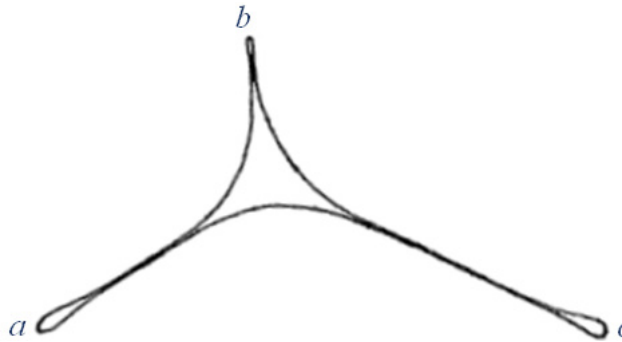


Рис. 3. Фотография конфигурации системы в натурном эксперименте

Отметим, что предлагаемый метод определения точек Штейнера является полностью аналитическим и может быть применён для систем с большим количеством точек.

### Заключение

Результаты представленного в работе исследования показали, что ограниченная по длине свободная граница различных сред на плоскости имеет многоосевую симметричную конфигурацию, включающую в себя подвижные точки Штейнера, расположение которых обеспечивает наименьшее значение потенциальной энергии среды с замкнутой областью. Последнее обстоятельство позволяет определить параметры этой конфигурации путём решения задачи Штейнера на основе физических аналогий.

### Литература

1. Карпунин Г. А. Аналог теории Морса для плоских линейных сетей и обобщенная проблема Штейнера / Г. А. Карпунин // Матем. сб. – 2000. – Т. 191, № 2. – С. 64–90.
2. Курант Р. Что такое математика? / Р. Курант, Г. Роббинс. – Москва : МЦНМО, 2019. – 564 с.
3. Melzak Z. A. On the problem of Steiner / Z. A. Melzak // Canadian Mathematical Bulletin. – 1961. – No. 4. – P. 143–148.
4. Uteshev Alexei Yu. Analytical solution for the generalized Fermat–Torricelli problem / Alexei Yu. Uteshev // The American Mathematical Monthly. – 2012. – No 121. – P. 318–331.
5. Reddy J. N. Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells / J. N. Reddy. – Boca Raton : CRC Press, 2006. – P. 568
6. Reddy J. N. An Introduction to Continuum Mechanics with Applications / J. N. Reddy. – New York : Cambridge University Press, 2007. – P. 370.
7. Протасов В. Ю. Максимумы и минимумы в геометрии / В. Ю. Протасов. – Москва : МЦНМО. – 56 с.

## ПРИМЕНЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЗВУКА

С. А. Скобельцын, М. В. Окороков

*Тульский государственный университет*

**Аннотация.** На основе оптической теоремы разработан интегральный энергетический критерий, предназначенный для оценки точности решения дифракционных задач. В качестве энергетического показателя, баланс которого необходимо проверить согласно данному критерию, предложено использовать средний поток энергии звуковой волны. Применение энергетического критерия продемонстрировано на примере решения задачи о рассеянии плоской звуковой волны на абсолютно жесткой неподвижной сфере. Выполнение энергетического баланса исследовано для различных значений волнового размера сферы и радиуса сферической поверхности, окружающей тело. Показано, что в случае ошибки при расчете одного из искомых коэффициентов использование энергетического критерия позволяет это обнаружить.

**Ключевые слова:** дифракция звука, энергетический критерий, плоская звуковая волна, абсолютно жесткая неподвижная сфера, идеальная жидкость, средний поток энергии, энергетический баланс, коэффициенты ряда, точность решения, комплексная ошибка.

### Введение

В настоящее время результаты решения задач дифракции звука на телах, имеющих различную структуру и конфигурацию, востребованы для многих практических приложений. Они активно используются в дефектоскопии при разработке методов неразрушающего контроля, позволяющих проверить качество изделия без его демонтажа. Изучение явления дифракции играет важную роль в гидроакустике, поскольку способствует решению задач подводной локации. Без исследования рассеяния звуковых волн от тел различной структуры и конфигурации не обходится и разработка современных материалов с требуемыми звукоотражающими и звукопоглощающими характеристиками. Также результаты решения дифракционных задач активно применяются в геофизике, сейсмологии, шумоподавлении и судовой акустике.

Поскольку результаты исследования дифракции звука на различных телах имеют существенную ценность для исследовательской и инженерной практики, важной задачей является проверка их корректности и непротиворечивости. Многие реальные объекты имеют сложную форму, а также неоднородную и анизотропную структуру. Зачастую это приводит к значительному усложнению постановок задач рассеяния звука на этих телах, что, в свою очередь, обуславливает увеличение сложности их точного аналитического решения. В большинстве случаев оно имеет очень громоздкий вид, который серьезно затрудняет анализ полученных результатов. По этой причине поиск приближенных (численных) решений приобретает все большую актуальность. Вследствие активного использования численных решений крайне важной задачей является разработка средств контроля их точности и изучение влияния на нее геометрических и физических параметров постановки задачи, а также используемых для решения методов и алгоритмов.

Во многих классах дифракционных задач искомые акустические величины (например, рассеянные поля) удобно, а часто и необходимо, представить в виде разложений в ряд, содержащий бесконечное число слагаемых. По мнению авторов, на точность и правильность нахождения решения задач такого вида наиболее сильное влияние оказывают два фактора: количество удерживаемых членов ряда и ошибки в расчете коэффициентов ряда. Очевидно, что учет бес-

конечного количества членов ряда невозможен, поэтому для получения решения ограничиваются некоторым конечным числом членов, т.е. от точного аналитического решения переходят к приближенному решению. Естественно, возникает вопрос: сколько слагаемых необходимо оставить в сумме, чтобы обеспечить требуемую точность вычислений? В литературе встречаются различные подходы по определению количества удерживаемых членов ряда, применение которых зависит от направленности и специфики соответствующей дифракционной задачи.

Так, с этой целью в задачах дифракции звука на упругих телах наиболее часто употребляется следующее неравенство, указанное, например, в [1]:

$$n \geq 2[ka],$$

где  $n$  — учитываемое количество членов ряда;  $ka$  — волновой размер тела;  $[ ]$  — целая часть числа.

Е. А. Иванов в [2] для определения необходимого количества слагаемых ряда в задачах, содержащих бесконечные системы уравнений, решаемые методом редукции, предлагает следующий способ. Сначала нужно вычислить невязки между соответствующими членами искомых рядов, полученных при последовательных значениях порядка усечения, а затем, сравнив наибольшую из невязок и заданную наперед точность, сделать вывод о целесообразности продолжения расчетов.

В работе [3] автор приходит к выводу, что при проведении вычислений в дальней от источника звука зоне в бесконечном ряде, описывающем поле в слое с абсолютно отражающими границами, достаточно учитывать столько членов, сколько полуволн укладывается на толщине слоя.

Один из основных факторов, приводящих к тому, что решение дифракционной задачи будет найдено неверно, — это неправильный расчет коэффициентов искомых рядов. Авторам представляется, что наиболее универсальным критерием контроля правильности и точности решения задач дифракции звука на телах различной структуры и конфигурации является так называемый энергетический критерий, основанный на проверке выполнения одного из фундаментальных законов природы — закона сохранения энергии. Использование данного критерия предполагает исследование баланса различных энергетических характеристик падающей и рассеянной звуковых волн. В зависимости от степени расхождения рассчитанных показателей можно судить о правильности и точности решения дифракционной задачи.

В настоящее время известны подходы к анализу баланса энергетических характеристик падающей и рассеянной акустических волн при решении задач дифракции звука на объектах различной формы. В [4] исследован в ближнем поле баланс среднего потока мощности в области, содержащей цилиндрическое тело, и среднего потока мощности в области, не включающей цилиндр. В качестве интегрального критерия оценки точности решения задачи о прохождении звука через область сопряжения плоского и клиновидного волноводов в работе [5] использован закон сохранения энергии. В [6] получено выражение, характеризующее энергетический баланс в установившемся состоянии для одной из подсистем, на которые разбивается исходная структура при проведении статистического энергетического анализа.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим применение энергетического критерия для проверки правильности и контроля точности решения задачи о рассеянии плоской звуковой волны на абсолютно жесткой неподвижной сфере радиуса  $a$ . Пусть падающая волна распространяется по направлению оси  $z$ , а тело находится в идеальной жидкости с плотностью  $\rho$ , скорость звука в которой  $c$ . Необходимо определить акустическое поле, рассеянное сферой.

Акустическое давление падающей волны в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$  с началом в центре сферы определяется следующим образом:

$$p_i = p_0 e^{i(kr \cos \theta - \omega t)}, \quad (1)$$

где  $p_0$  — амплитуда давления;  $k$  — волновое число вне тела;  $\omega$  — круговая частота;  $t$  — время.

Записав уравнение Гельмгольца для давления рассеянной волны  $p_s$  в сферической системе координат, решив его методом разделения переменных и воспользовавшись граничным условием, заключающимся в равенстве нулю на поверхности сферы нормальной скорости частиц полного акустического поля, а также условием излучения на бесконечности ( $\lim_{r \rightarrow \infty} p_s = 0$ ), получим, что выражение для  $p_s$  будет иметь вид:

$$p_s = -p_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \cdot (2n+1) \cdot \frac{j'_n(ka)}{h'_n(ka)} \cdot h_n(kr) \cdot P_n(\cos \theta), \quad (2)$$

где  $j'_n(x)$  — 1-я производная сферической функции Бесселя порядка  $n$ ;  $h_n(x)$  — сферическая функция Ханкеля первого рода порядка  $n$ ;  $h'_n(x)$  — 1-я производная сферической функции Ханкеля первого рода порядка  $n$ ;  $P_n(x)$  — многочлен Лежандра степени  $n$ . В дальнейшем временной множитель  $e^{-i\omega t}$  будем опускать.

## 2. Применение энергетического критерия

Проверим правильность полученного выражения для  $p_s$ , а именно правильность нахождения коэффициентов

$$A_n = -p_0 i^n (2n+1) \frac{j'_n(ka)}{h'_n(ka)}.$$

Для этого воспользуемся разработанным интегральным энергетическим критерием, полученным на основе оптической теоремы [7] и заключающимся в проверке следующего равенства:

$$\langle W_s \rangle = \langle W_i \rangle, \quad (3)$$

где  $\langle W_s \rangle$  — средний за период поток энергии в рассеянной волне;  $\langle W_i \rangle = \frac{1}{2\omega\rho} \operatorname{Im} \int_S \left( p_s \frac{\partial p_i^*}{\partial r} + p_i \frac{\partial p_s^*}{\partial r} \right) dS$ ;  $S$  — сферическая поверхность произвольного радиуса, окружающая абсолютно жесткую сферу. Здесь и далее звездочка означает комплексно сопряженную величину.

Вычислим средний поток энергии рассеянной волны через поверхность  $S$  по следующей формуле:

$$\langle W_s \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_S p_s V_{sn}^* dS,$$

где  $V_{sn}$  — нормальная к  $S$  составляющая колебательной скорости частиц в рассеянной волне.

Рассмотрим в качестве поверхности  $S$  сферу радиуса  $r_1$ . Значение  $r_1$  можно выбрать произвольно, т. к. поток энергии сферической волны в отсутствие поглощения имеет одинаковое значение через сферу любого радиуса. Тогда получим:

$$\langle W_s \rangle = \frac{r_1^2}{2} \operatorname{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} p_s V_{sn}^* \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Так как

$$V_{sn}^* = \frac{-ip_0}{\rho c} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \cdot (2n+1) \cdot j'_n(ka) \cdot \frac{(h'_n(kr))^*}{(h'_n(ka))^*} \cdot P_n(\cos \theta),$$

то



$$\begin{aligned} \langle W_s \rangle = & \frac{r_1^2}{2} \operatorname{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{i p_0^2}{\rho c} \sum_{n=0}^\infty i^n \cdot (2n+1) \cdot \frac{j'_n(ka)}{h'_n(ka)} \cdot h_n(kr_1) \cdot P_n(\cos \theta) \times \\ & \times \sum_{n=0}^\infty (-i)^n \cdot (2n+1) \cdot j'_n(ka) \cdot \frac{(h'_n(kr_1))^*}{(h'_n(ka))^*} \cdot P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Поменяем местами суммирование и интегрирование и воспользуемся свойством ортогональности полиномов Лежандра:

$$\int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \frac{2}{2n+1}, & n = k. \end{cases}$$

Получим, что средний за период поток энергии в рассеянной волне равен:

$$\langle W_s \rangle = \frac{2r_1^2 p_0^2 \pi}{\rho c} \operatorname{Re} \left( i \sum_{n=0}^\infty (2n+1) \cdot \frac{(j'_n(ka))^2}{|h'_n(ka)|^2} \cdot h_n(kr_1) \cdot (h'_n(kr_1))^* \right). \quad (4)$$

Продифференцировав по  $r$  выражения для  $p_i$  и  $p_s$ , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial r} &= p_0 i k \cos \theta e^{i k r \cos \theta} \\ \frac{\partial p_s}{\partial r} &= -p_0 k \sum_{n=0}^\infty i^n \cdot (2n+1) \cdot \frac{j'_n(ka)}{h'_n(ka)} \cdot h'_n(kr) \cdot P_n(\cos \theta). \end{aligned} \quad (5)$$

Применив к обоим выражениям (5) операцию комплексного сопряжения, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i^*}{\partial r} &= -p_0 i k \cos \theta e^{-i k r \cos \theta} \\ \frac{\partial p_s^*}{\partial r} &= -p_0 k \sum_{n=0}^\infty (-i)^n \cdot (2n+1) \cdot \frac{j'_n(ka)}{(h'_n(ka))^*} \cdot (h'_n(kr))^* \cdot P_n(\cos \theta). \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (1), (2), (4) и (6) в (3), получим следующее выражение для проверки энергетического баланса в рассматриваемой задаче:

$$\begin{aligned} & \frac{2r_1^2 p_0^2 \pi}{\rho c} \operatorname{Re} \left( i \sum_{n=0}^\infty (2n+1) \cdot \frac{(j'_n(ka))^2}{|h'_n(ka)|^2} \cdot h_n(kr_1) \cdot (h'_n(kr_1))^* \right) = \\ &= \frac{1}{2\omega\rho} \operatorname{Im} \left( 2\pi r_1^2 \left( \int_0^\pi \left( p_0^2 i k \cos \theta e^{-i k r_1 \cos \theta} \sum_{n=0}^\infty i^n \cdot (2n+1) \cdot \frac{j'_n(ka)}{h'_n(ka)} \cdot h_n(kr_1) \cdot P_n(\cos \theta) \right) \sin \theta d\theta - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \int_0^\pi \left( p_0^2 e^{i k r_1 \cos \theta} k \sum_{n=0}^\infty (-i)^n \cdot (2n+1) \cdot \frac{j'_n(ka)}{(h'_n(ka))^*} \cdot (h'_n(kr_1))^* \cdot P_n(\cos \theta) \right) \sin \theta d\theta \right) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

### 3. Численные исследования

Воспользовавшись (7), исследуем выполнение энергетического баланса для различных значений  $k$ ,  $a$  и  $r_1$ . Полагалось, что сфера находится в воде ( $\rho = 1000$ ,  $c = 1500$ ),  $p_0 = 1$ ,  $n = 0..10$ . Полученные результаты приведены в табл. 1.

Анализ результатов, представленных в табл. 1, позволяет сделать вывод, что энергетический критерий оценки точности решения для принятого числа учитываемых слагаемых в рядах выполняется с точностью до  $7 \cdot 10^{-7} \%$ . Высокая степень точности свидетельствует о том, что коэффициенты  $A_n$  определены верно, а значит, и решение задачи о рассеянии плоской звуковой волны на абсолютно жесткой неподвижной сфере найдено корректно.

Таблица 1

Проверка энергетического баланса для различных значений  $k$ ,  $a$  и  $r_1$ 

| Значения $k$ и $a$ | $r_1$ | Относительная разница: $\frac{ \langle W_s \rangle - \langle W_i \rangle }{\min(\langle W_s \rangle, \langle W_i \rangle)} \cdot 100 \%$ |
|--------------------|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $k = 1, a = 1$     | 2     | $2.969 \cdot 10^{-8} \%$                                                                                                                 |
|                    | 100   | $5.938 \cdot 10^{-8} \%$                                                                                                                 |
|                    | 1000  | $2.969 \cdot 10^{-8} \%$                                                                                                                 |
| $k = 3, a = 1$     | 2     | 0 %                                                                                                                                      |
|                    | 100   | 0 %                                                                                                                                      |
|                    | 1000  | 0 %                                                                                                                                      |
| $k = 1, a = 3$     | 2     | $6.16 \cdot 10^{-7} \%$                                                                                                                  |
|                    | 100   | 0 %                                                                                                                                      |
|                    | 1000  | $5.133 \cdot 10^{-8} \%$                                                                                                                 |
| $k = 2, a = 1.5$   | 2     | $4.107 \cdot 10^{-8} \%$                                                                                                                 |
|                    | 100   | 0 %                                                                                                                                      |
|                    | 1000  | 0 %                                                                                                                                      |

Далее, «искусственно» введем ошибку в один из коэффициентов  $A_n$  и исследуем выполнение энергетического баланса в этом случае.

Пусть  $k = 3$ ,  $a = 1$ ,  $r_1 = 2$ , а  $\rho$ ,  $c$ ,  $p_0$ ,  $n$  имеют значения, определенные выше. Предположим, что коэффициент  $A_5$  вычислен с комплексной ошибкой  $\delta$ , модуль которой равен  $\delta_0 = \varepsilon |A_5|$ , где  $\varepsilon$  — числовой коэффициент. Так как  $A_5$  также представляет собой комплексную величину, то для исследования влияния знака действительной и мнимой частей  $\delta$ , а также вида  $\delta$  (отсутствие мнимой или действительной части) на значение  $A_5$  рассмотрим следующие формы представления  $\delta$ :

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \delta_0, \quad \delta_2 = \delta_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i), \\ \delta_3 &= \delta_0 i, \quad \delta_4 = -\delta_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i), \\ \delta_5 &= -\delta_0, \quad \delta_6 = -\delta_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i), \\ \delta_7 &= -\delta_0 i, \quad \delta_8 = \delta_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i).\end{aligned}$$

Исследуем влияние введенной ошибки на энергетический баланс в рассмотренной выше задаче о рассеянии плоской звуковой волны на абсолютно жесткой неподвижной сфере. С этой целью вычислим  $\langle W_s^j \rangle$  и  $\langle W_i^j \rangle$  — значения  $\langle W_s \rangle$  и  $\langle W_i \rangle$  соответственно в случае, если коэффициент  $A_5$  имеет вид  $A_5 + \delta_j$ ,  $j = \overline{1,8}$ .

Далее, при ошибочно вычисленном значении коэффициента  $A_5$  рассчитаем относительную разницу между величинами энергетических показателей:

$$P(\varepsilon) = \frac{\frac{1}{8} \left| \sum_{j=1}^8 \langle W_s^j \rangle - \sum_{j=1}^8 \langle W_i^j \rangle \right|}{\min \left( \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 \langle W_s^j \rangle, \frac{1}{8} \sum_{j=1}^8 \langle W_i^j \rangle \right)} \cdot 100 \%.$$

Представленная на рис. 1 зависимость  $P$  от  $\varepsilon$  позволяет проанализировать характер воздействия «искусственно» введенной ошибки на энергетический баланс в дифракционной задаче.

Воспользуемся методом наименьших квадратов для поиска многочлена, аппроксимирующего наблюдаемую связь между  $P$  и  $\varepsilon$ . Полученная функциональная зависимость, изображенная на рис. 2 пунктирной линией, будет иметь следующий вид:

$$\tilde{P}(\varepsilon) = 0.02023501582\varepsilon^2 - 4.89865043 \cdot 10^{-6}\varepsilon + 1.433918977 \cdot 10^{-7}. \quad (8)$$

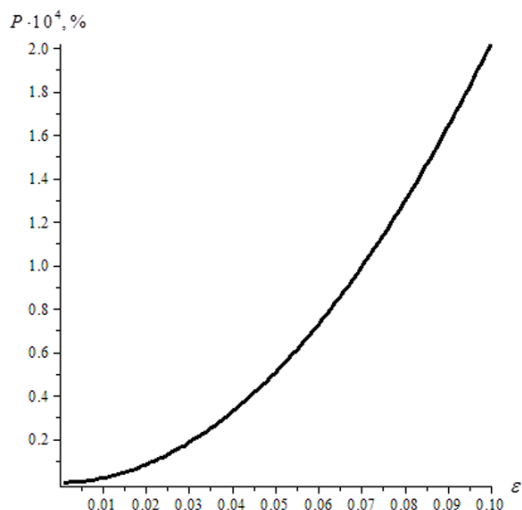


Рис. 1. Зависимость  $P$  от  $\varepsilon$

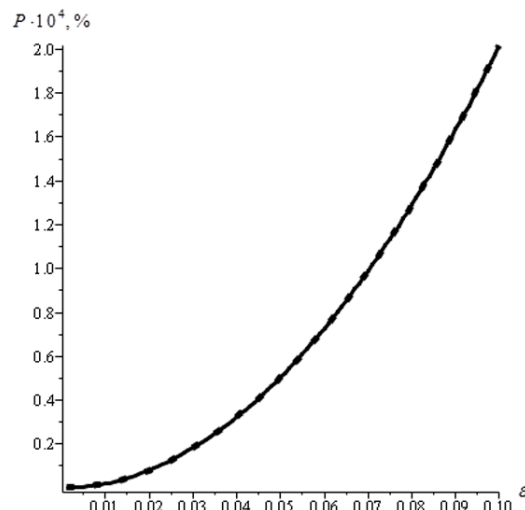


Рис. 2. Аппроксимация зависимости  $P(\varepsilon)$  (сплошная линия) многочленом  $\tilde{P}(\varepsilon)$  (пунктирная линия)

Для наглядности на рис. 3, 4 приведено взаимное расположение кривых  $P(\varepsilon)$  и  $\tilde{P}(\varepsilon)$  в случае соответственно малых и больших значений  $\varepsilon$  из рассматриваемого диапазона от 0.001 до 0.1.

Согласно  $F$ -критерию Фишера уравнение (8) адекватно описывает имеющуюся зависимость  $P(\varepsilon)$ . По  $T$ -критерию Стьюдента все коэффициенты многочлена  $\tilde{P}(\varepsilon)$  значимы. Модель, описываемая формулой (8), подобрана качественно, о чем свидетельствует близкое к 1 значение коэффициента детерминации ( $R^2 = 0.9999975798$ ).

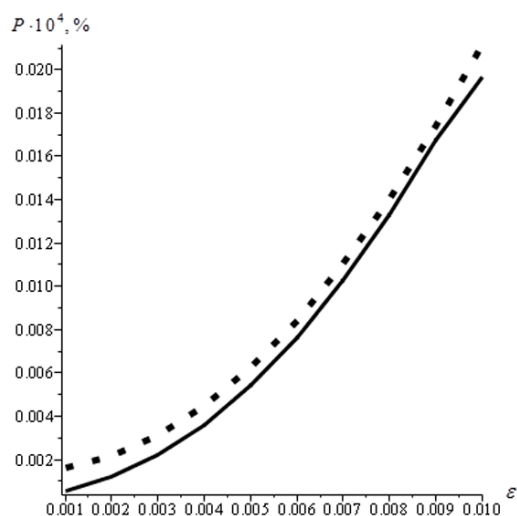


Рис. 3. Взаимное расположение кривых  $P(\varepsilon)$  (сплошная линия) и  $\tilde{P}(\varepsilon)$  (пунктирная линия) при  $\varepsilon = 0.001 \dots 0.01$

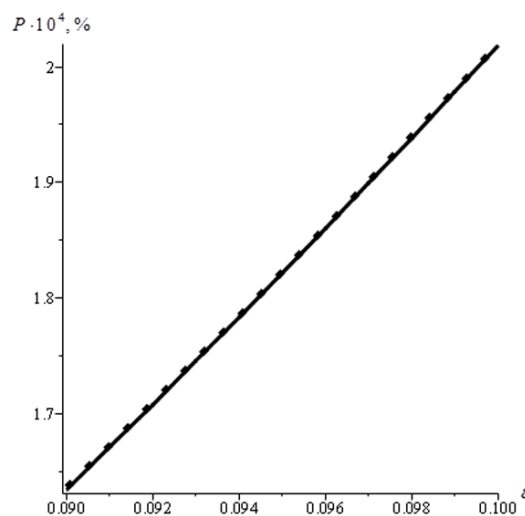


Рис. 4. Взаимное расположение кривых  $P(\varepsilon)$  (сплошная линия) и  $\tilde{P}(\varepsilon)$  (пунктирная линия) при  $\varepsilon = 0.09 \dots 0.1$

Обобщив графические результаты, приведенные на рис. 1, можем сделать вывод: чем большее значение имеет  $\varepsilon$ , тем отчетливее наблюдается расхождение между величинами энергетических показателей, причем в рассматриваемом диапазоне изменения коэффициента  $\varepsilon$  зависимость  $P(\varepsilon)$  может быть аппроксимирована с высокой степенью точности квадратичной функцией. Погрешность в выполнении энергетического баланса свидетельствует о наличии ошибки в решении задачи о дифракции звука на абсолютно жесткой неподвижной сфере.

### Заключение

Исходя из вышеперечисленного, можно заключить, что выполнение энергетического баланса с высокой степенью точности является одним из критериев, подтверждающих правильность решения дифракционной задачи. В свою очередь, нарушение энергетического баланса отчетливо указывает на наличие ошибки в полученных результатах. Таким образом, разработанный энергетический критерий может быть использован для проверки правильности и контроля точности решения дифракционных задач.

### Литература

1. Хёnl X. Теория дифракции / X. Хёnl, A. Мауэ, K. Вестпфаль. – Москва: Мир, 1964. – 428 с.
2. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах / Е. А. Иванов. – Минск : Наука и техника, 1968. – 584 с.
3. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах / Л. М. Бреховских. – Москва : Наука, 1973. – 343 с.
4. Папкова Ю. И. Энергетические характеристики звукового поля в неоднородной морской среде с плавающим на поверхности цилиндрическим телом / Ю. И. Папкова, С. О. Папков, А. А. Ярошенко // Морской гидрофизический журнал. – 2006. – № 3. – С. 52–59.
5. Мацыпура В. Т. Прохождение звука через область сопряжения плоского и клиновидного волноводов / В. Т. Мацыпура // Акустический вестник. – 1999. – Т. 2. – № 1. – С. 31–41.
6. Le Bot A. Validity diagrams of statistical energy analysis / A. Le Bot, V. Cotoni // Journal of Sound and Vibration. – 2010. – V. 329. – № 2. – P. 221–235.
7. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука / Е. Л. Шендеров. – Ленинград: Судостроение, 1989. – 304 с.